Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

12. Dezember 2016

1) Wie sind die *punktweise Addition* und die *punktweise Multiplikation* von Funktionen mit Bildbereich $\mathbb{R}$ definiert? Welche Rechenregeln gelten für diese Rechenoperationen?
Die Funktionen f, g, h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ seien durch

$$f(r) := |r| + r \ , \ g(r) := 3r - 3|r| \ , \ h(r) := 18r|r| \ , \ r \in \mathbb{R},$$

definiert. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$(f+g)^2 = f^2 + g^2\,;$
$9f^2 - g^2 = 2h\,;$
$(f+g)^3 = f^3 + 222f^2 \cdot g + 22f \cdot g^2 + g^3\,;$
$(f \cdot h - g)^2 = h^2 + g\,;$
$f + g \cdot h = h - g \cdot f \quad .$

2) Was ist eine *Polynomfunktion*? Berechnen Sie die den Funktionswert der Polynomfunktion
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto z^7 + 3z^6 - 2z^4 + 3z^3 - 8z^2 + 5z - 1$
an der Stelle 4 so, dass möglichst wenig Multiplikationen nötig sind.
Berechnen Sie mit möglichst geringem Rechenaufwand Koeffizienten mit Index 5 und mit Index 4 der Polynomfunktion $f \cdot g$, wobei g die Polynomfunktion von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ mit $g(t) = t^3 + 3t^2 - 5t + 1$ ist.

3) Was ist die *Determinante* einer Matrix? Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix und B die Matrix, die man durch Addition der dritten Spalte von A zur ersten erhält.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinanten von A und B gleich sind.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinante von $4A$ das 64-fache der Determinante von A ist.

4) Erläutern Sie das in Satz 192 angegebene Verfahren zur Berechnung von Determinanten. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & -2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 884567 & 2 & 3 \\ -3 & 779998 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6655555 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dann die Determinanten von

$$(-2)A, \; A^3 \cdot B^2 \quad \text{und von} \quad -B.$$

5) Welche Eigenschaften von Determinanten wurden in der Vorlesung besprochen?
Es seien A und B reelle 5×5-Matrizen mit $\det(A) = 2$ und $\det(B) = -2$. Berechnen Sie

$$\det(A^3 \cdot A^T \cdot B^T), \quad \det(-B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^T),$$
$$\det(-2A) \quad \text{und} \quad \det(-B^2).$$

Es sei n eine positive ganze Zahl. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix A mit $A_{ij} := i \cdot n + j$, $1 \le i, j \le n$.
Hinweis: Schreiben Sie diese Matrix für $n = 1, 2, 3, 4$ an!

6) Wie kann man mit Hilfe der Determinante einer quadratischen Matrix entscheiden, ob diese invertierbar ist? Welche der folgenden reellen 2×2-Matrizen ist invertierbar? Versuchen Sie, das mit möglichst wenig Rechenaufwand zu entscheiden:

$$\begin{pmatrix} 187{,}568 & 349{,}344 \\ 331{,}456 & -451{,}122 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 323 & 689 \\ 138 & 261 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2{,}42 \cdot 10^5 & 1{,}67 \cdot 10^6 \\ 0{,}44 \cdot 10^4 & 1{,}23 \cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $a < b < c < d$ sind, dann ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

invertierbar.