Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

5. Dezember 2016

1) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum und $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq w$. Zeigen Sie, dass die Menge aller Zahlenpaare in $\mathbb{R}^2$, deren Abstand zu v und zu w gleich ist, eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist, dass diese Gerade zur Geraden durch v und w normal steht und den Streckenmittelpunkt $\frac{1}{2}(v + w)$ enthält. (Diese Gerade heißt *Streckensymmetrale* der Strecke zwischen v und w). Berechnen Sie eine implizite Form und eine Parameterform der Streckensymmetrale der Strecke zwischen $(1, 2)$ und $(-3, 4)$.

2) Was ist der *Fußpunkt des Lotes* eines Vektors auf einen affinen Unterraum eines euklidischen Raumes? Was ist der *Abstand eines Punktes* von einem einem affinen Unterraum?
Berechnen Sie die Fußpunkte der Lote von $(3, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) auf die affinen Unterräume

$$(-1, 0, -1) + \mathbb{R}(1, 1, 2) \text{ und } (1, 0, 0) + \mathbb{R}(4, 2, -1) + \mathbb{R}(2, 2, -1)\,.$$

Berechnen Sie die Abstände von $(3, 1, -2) \in \mathbb{R}^3$ zu diesen affinen Unterräumen.

3) Was ist der *Winkel zwischen zwei Halbgeraden*, deren Anfangspunkte gleich sind? Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt.
Sei $A := (3, 0, 4)$ und $B := (1, -2, -2)$. Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}A$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}B$. Der Winkel zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}C$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}D$ ist $\frac{\pi}{6}$, der Abstand zwischen C und 0 ist 3 und der zwischen D und 0 ist 2. Berechnen Sie den Abstand zwischen C und D und zwischen 0 und $C + D$.

4) Wie ist die *Hintereinanderausführung von Funktionen* definiert? Was ist eine *bijektive Funktion*? Was ist die *Umkehrfunktion* einer bijektiven Funktion?

Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Überprüfen Sie, ob die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\; z \longmapsto A \cdot z\,,$$

und

$$g : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\; z \longmapsto B \cdot z\,,$$

bijektiv sind. Wenn ja, ermitteln Sie deren Umkehrfunktionen. Beschreiben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ sowie - falls f und g bijektiv sind - deren Umkehrfunktionen.

5) Sei V ein Vektorraum. Was ist eine *Translation* in V? Wie sind die Addition und die Skalarmultiplikation im Vektorraum aller Translationen von V definiert? Was ist ein *Pfeil* in V?
Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und wählen Sie eine Basis (P, Q) dieses Vektoraums.
Die Translationen s und t sind durch $s(Q) = Q - P$ und $t(Q) = P$ definiert. Skizzieren Sie die Graphen von s, t und $s \circ t$, indem Sie einige Elemente dieser Graphen in die Ebene zeichnen.
Bilden die Translationen s und t eine Basis des Vektorraums aller Translationen der Ebene? Wenn ja, berechnen Sie die Koordinatenspalte der Translation r, die durch $r(0) = Q$ definiert ist, bezüglich dieser Basis.

6) Was ist eine *Permutation*? Wie ist die *Hintereinanderausführung* von Permutationen definiert? Was ist ein *Zykel*? Was ist das *Vorzeichen* einer Permutation? Wie kann das Vorzeichen einer Permutation berechnet werden? Es seien

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 1 & 3 & 7 & 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 7 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen. Berechnen Sie $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1} und $g^2 := g \circ g$. Zerlegen Sie f und g in ein Produkt von disjunkten Zykeln. Berechnen Sie das Vorzeichen dieser Permutationen. Zerlegen Sie f und g in ein Produkt von Transpositionen.