Prüfung Lineare Algebra 1

1. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A. A und C haben Stufenform, B nicht.

B. A und B haben Stufenform, C nicht.

C. B und C haben Stufenform, A nicht.

D. A, B und C haben Stufenform.

E. Nur C hat Stufenform.

---

2. Es seien A und B rationale Matrizen mit 11 Zeilen und 11 Spalten. Dann ist der Koeffizient in der siebten Zeile und achten Spalte von AB gleich

---

A. $\sum_{i=1}^{11} A_{8i} B_{i7}$

B. $\sum_{\ell=1}^{11} B_{\ell 8} A_{7\ell}$

C. $\sum_{i=1}^{11} \sum_{j=1}^{11} A_{7i} B_{j8}$

D. $\sum_{k=1}^{11} \sum_{\ell=1}^{11} A_{k7} B_{\ell 8}$

E. $\sum_{k=1}^{11} A_{k7} B_{8k}$

---

3. Es seien $n \geq 3$ eine ganze Zahl und σ, τ Permutationen der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Wenn σ und τ Zyklen sind, dann ist $\sigma \cdot \tau = \tau \cdot \sigma$.
(2) Jede Permutation ist Produkt paarweise disjunkter Zyklen, diese sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.
(3) Jede Permutation ist Produkt von Transpositionen, diese sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.

A. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

B. (2) ist wahr, (1) und (3) sind falsch.

C. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

D. (1) , (2) und (3) sind wahr.

E. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

---

4. Es seien $u, v \in \mathbb{R}^3$ und $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Funktion so, dass $f(u + v) = (1, 0)$ und $f(u - v) = (0, 1)$ ist. Dann ist $f(u)$ bzw. $f(v)$ gleich

---

A. $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

B. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

C. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ bzw. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

D. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ bzw. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

E. $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ bzw. $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

---

5. Es sei n eine positive ganze Zahl. V sei ein Vektorraum der Dimension n. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Ein affiner Unterraum W von V ist genau dann ein Untervektorraum, wenn für alle $w_1, w_2 \in W$ auch $w_1 - w_2 \in W$ ist.
(2) Die Dimension des Vektorraums $T(V)$ aller Translationen in V ist $2n$.
(3) Wenn ein n-Tupel $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ von Vektoren in V linear unabhängig ist, dann ist es auch ein Erzeugendensystem von V.

A. (1) , (2) und (3) sind wahr.

B. (2) ist wahr, (1) und (3) sind falsch.

C. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

D. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

E. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

---

6. Es sei A eine $m \times n$-Matrix, b eine m-Spalte und $L(A, b)$ die Lösungsmenge des durch A und b gegebenen Systems linearer Gleichungen. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Wenn A Stufenform hat und p die Anzahl der Pivots von A ist, dann ist die Dimension von $L(A, 0)$ gleich $m - p$.
(2) Wenn die Matrix A Stufenform hat, p die Anzahl der Pivots von A ist und $b_{p+1} = 0, b_{p+2} = 0, \ldots, b_m = 0$ ist, dann ist $L(A, b)$ nicht leer.
(3) Wenn A Stufenform hat, $L(A, 0)$ nur ein Element enthält und $m = n$ ist, dann ist A die Einheitsmatrix.

A. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

B. (2) ist wahr, (1) und (3) sind falsch.

C. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

D. (1) , (2) und (3) sind wahr.

E. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

---

7. Es sei U der Vektorraum aller reellen 5×5-Matrizen mit der Eigenschaft, dass alle Einträge in der zweiten Spalte 0 sind, V der Vektorraum aller Translationen in $\mathbb{R}^3$ und W der Lösungsraum der homogenen linearen Gleichung $x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0$. Dann ist die Dimension von U bzw. V bzw. W

A. 20 bzw. 3 bzw. 3

B. 4 bzw. 3 bzw. 4

C. 20 bzw. 3 bzw. 4

D. 4 bzw. 6 bzw. 3

E. 20 bzw. 6 bzw. 4

---

8. Welche der folgenden Aussagen ist nicht für alle rationalen 3×3-Matrizen A richtig?

A. $det(3 \cdot A) = 3 \cdot det(A)$

B. Wenn A Dreiecksform hat, dann ist $det(A) = A_{11}A_{22}A_{33}$.

C. A ist genau dann invertierbar, wenn $det(A) \neq 0$ ist.

D. $det(A^2 - I_3) = det(A - I_3)det(A + I_3)$

E. $det(4 \cdot A) = 64 \cdot det(A)$

---

9. Es seien $n \geq 2$ eine ganze Zahl, V mit dem Skalarprodukt $< -,- >$ ein n-dimensionaler euklidischer Raum und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V.
Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Für alle $w \in V$ ist $w = \sum_{i=1}^{n} < v_i, w > v_i$.
(2) $||v_1 - v_2|| = \sqrt{2}$.
(3) Das Volumen des von den Vektoren $w_1, \ldots, w_n \in V$ erzeugten Parallelotops ist der Absolutbetrag der Determinante der Matrix $(< w_i, w_j >)_{1 \leq i,j \leq n}$.

A. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

B. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

C. (1), (2) und (3) sind wahr.

D. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

E. (2) und (3) sind falsch, (1) ist wahr.

---

10. Die Zifferndarstellung der ganzen Zahl z zur Basis 2 sei 111000111000111. Dann ist die Zifferndarstellung der Zahl $4 \cdot z + 2$ zur Basis 2

A. 11100011100100010

B. 11100011100011101

C. 111000111000111100

D. 0

E. 11100011100011110

Prüfung Lineare Algebra 1

11. Schreiben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe genau an!

Ein n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n)$ von Vektoren in V ist ein Erzeugendensystem von V, wenn jeder Vektor in V ...

Das Vorzeichen einer Permutation $\tau \in S_n$ ist ...

Es seien P und Q Mengen und f eine Funktion von P nach Q. Die Funktion f ist genau dann bijektiv, wenn ...

Es sei $f : U \longrightarrow W$ eine lineare Funktion, $\underline{u} := (u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von U und $\underline{w} := (w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Der Eintrag in der j-ten Zeile und i-ten Spalte der Matrix von f bezüglich $\underline{u}$ und $\underline{w}$ ist die Koordinate von

....

beim Basisvektor

....

Prüfung Lineare Algebra 1

12. Schreiben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe genau an!

Es sei p eine positive ganze Zahl und $M \in K^{p \times p}$ eine $p \times p$-Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Dann ist die Determinante von M

$$det(M) :=$$

V sei ein endlich erzeugter Vektorraum. Die Dimension von V ist ...

Eine nicht-leere Teilmenge U eines Vektorraums V (über einem Körper K) ist ein affiner Unterraum von V genau dann, wenn ...

Es sei W ein dreidimensionaler orientierter euklidischer Raum, $x \in W$ und $y \in W$. Das Vektorprodukt $x \times y$ ist der eindeutig bestimmte Vektor in W, der die folgenden drei Bedingungen erfüllt:

1.) $< x, x \times y >=< y, x \times y >= 0$;

2.) ...

3.) ...

---

13. Es sei m eine positive ganze Zahl und T eine rationale $m \times m$-Matrix. Beschreiben Sie das Verfahren, wie man überprüft, ob T invertierbar ist, und - wenn ja - wie man die zu T inverse Matrix berechnet. Begründen Sie dann, warum jede invertierbare Matrix Produkt von Elementarmatrizen ist.

14. Es seien M eine reelle $p \times p$-Matrix und c eine reelle Spalte mit p Zeilen. Welche (endlich vielen) Daten werden (mit dem Gauss-Verfahren) berechnet, um die Lösungsmenge $L(M, c)$ des durch M und c gegebenen Systems von linearen Gleichungen zu beschreiben?

Geben Sie diese Daten zur Beschreibung der Lösungsmenge (in $\mathbf{R}^4$) des Systems linearer Gleichungen

$$x_1 + x_4 = 3, \quad x_2 - x_3 = 1$$

an.

Prüfung Lineare Algebra 1

15. Es seien V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt $< -,- >$, $Q \in V$, U ein Untervektorraum von V und $(u_1, \ldots, u_n)$ eine Basis von U. Erläutern Sie, wie der Fußpunkt des Lotes von Q auf den Untervektorraum U definiert ist und wie man ihn berechnet!

16. Es sei n eine positive ganze Zahl und A eine komplexe $n \times n$-Matrix. Was ist das charakteristische Polynom von A? Was sind Eigenwerte und Eigenräume von A? Wie kann man diese berechnen?

Berechnen Sie alle Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}!$$

ANSWERKEY FOR "LA1¨Gr1˙21Jan17"

Version 1: B B B D E C A A A E