1. Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum der Dimension n und

$$\underline{w} = (w_1, \ldots, w_m) \in V^m \; .$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig ?

A. Wenn $m > n$ ist, dann ist $\underline{w}$ linear abhängig.

B. Wenn $m \leq n$ ist, dann ist $\underline{w}$ linear unabhängig.

C. Wenn $m \leq n$ ist, dann kann $\underline{w}$ zu einer Basis von V ergänzt werden.

D. Wenn $m = n$ ist, dann ist $\underline{w}$ eine Basis von V.

E. Wenn $m \geq n$ ist, dann kann aus $\underline{w}$ eine Basis von V ausgesondert werden.

---

2. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A. A und C haben Stufenform, B nicht.

B. A und B haben Stufenform, C nicht.

C. A, B und C haben Stufenform.

D. B und C haben Stufenform, A nicht.

E. Nur A hat Stufenform.

---

3. Sei $\sigma \in S_n$ eine Permutation. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) σ kann als Produkt von disjunkten Zyklen in S_n geschrieben werden und diese Zyklen sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.
(2) σ ist ein Produkt von Transpositionen in S_n und diese Transpositionen sind bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt.
(3) σ und σ^{-1} haben dasselbe Vorzeichen.

A. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

B. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

C. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

D. (1) ist wahr, (2) und (3) sind falsch.

E. (1) , (2) und (3) sind wahr.

---

4. Es seien n eine positive ganze Zahl und A, B beliebige Matrizen in $\mathbb{Q}^{n\times n}$. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) $det(A) + det(B) = det(A + B)$
(2) $det(A) \cdot det(B) = det(A \cdot B)$
(3) $det(3 \cdot A) = 3^n \cdot det(A)$

A. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

B. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

C. (1), (2) und (3) sind falsch.

D. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

E. (1) ist wahr, (2) und (3) sind falsch.

---

5. Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei A die Matrix von f bzgl. der Basen $\underline{v}$ von V und $\underline{w}$ von W. Sei $\underline{u}$ eine weitere Basis von V und sei T die Transformationsmatrix von $\underline{v}$ nach $\underline{u}$, also $\underline{u} = \underline{v} \cdot T$. Was ist dann die Matrix von f bzgl. der Basen $\underline{u}$ und $\underline{w}$?

A. $T^{-1}A$

B. AT

C. $T^{-1}AT$

D. TAT^{-1}

E. AT^{-1}

---

6. Es sei $\underline{v} := (v_1, \ldots, v_n)$ ein n-Tupel von Vektoren in einem Vektorraums V und T eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Jeder Vektor in V kann genau dann in eindeutiger Weise als Linearkombination von $v_1, \ldots, v_n$ geschrieben werden, wenn $\underline{v}$ eine Basis von V ist.
(2) Es sei $\underline{v}$ eine Basis von V. Wenn x die Koordinatenspalte eines Vektors $w \in V$ bezüglich $\underline{v}$ ist, dann ist $T \cdot x$ die Koordinatenspalte von w bezüglich $\underline{v}T$.
(3) Wenn $n > 1$ und $\underline{v}$ eine Basis von V ist, dann ist auch $(v_1 + v_2, v_2, \ldots, v_n)$ eine Basis von V.

A. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

B. (1) und (2) sind falsch, (3) ist wahr.

C. (1) ist wahr, (2) und (3) sind falsch.

D. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

E. (1) ist falsch, (2) und (3) sind wahr.

---

7. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

und $\mathrm{Ad}(A)$ die adjungierte Matrix von A. Was ist $\mathrm{Ad}(A)_{13}$?

A. -7

B. -1

C. 7

D. 0

E. 1

---

8. Welche der folgenden Familien ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem des Vektorraums $\mathbb{Q}^{n\times 1}$ aller rationalen n-Spalten?

A. Die Familie der Spalten einer invertierbaren $n \times n$-Matrix.

B. Die Familie der Spalten einer rationalen $n \times n$-Matrix, die eine Spalte enthält, deren Koeffizienten alle 0 sind.

C. Die Familie der Spalten einer rationalen $n \times (n+1)$-Matrix in Stufenform mit n Pivots.

D. Die Familie der Spalten einer rationalen $n \times (n-1)$-Matrix in Stufenform mit $n-1$ Pivots.

E. Die Familie der Spalten einer rationalen $n \times n$-Matrix in Stufenform mit weniger als n Pivots.

---

9. Die Menge der Eigenwerte der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist

A. $\{1, 3\}$

B. $\{2, 4\}$

C. $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

D. $\{1, 3, 0\}$

E. $\{1, 2, 3, 4\}$

---

10. Seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume und $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Welche der folgenden Aussagen ist richtig ?

A. Wenn $\mathrm{Kern}(f) = V$ ist, dann ist $W = \{0\}$.

B. Wenn $\dim(V) \leq \dim(W)$ ist, dann ist f injektiv.

C. Wenn $\dim(V) = 8$, $\dim(W) = 4$ und $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 4$ ist, dann ist f surjektiv.

D. Wenn $V = W$ ist, dann ist $\mathrm{Kern}(f) \subset \mathrm{Bild}(f)$.

E. Wenn $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ ist, dann ist f surjektiv.

---

11. A sei eine rationale Matrix mit n Zeilen und m Spalten und I_n sei die $n \times n$-Einheitsmatrix. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

A. Wenn $n = m$ ist und die Determinante von A gleich -2 ist, dann ist A invertierbar.

B. Wenn A invertierbar ist, U,V rationale Matrizen sind und $A \cdot U = A \cdot V$ ist, dann ist $U = V$.

C. Wenn A invertierbar ist und b eine Spalte rationaler Zahlen mit n Zeilen ist, dann hat das durch A und b gegebene System linearer Gleichungen genau eine Lösung.

D. Wenn es eine Matrix B gibt mit $A \cdot B = I_n$, dann ist A invertierbar.

E. Wenn A invertierbar ist, kann diese Matrix als Produkt von Elementarmatrizen geschrieben werden.

---

12. Seien $V := \mathbb{Q}^2$, (e_1, e_2) die Standardbasis von V und $b : V \times V \to \mathbb{Q}$ eine bilineare Abbildung mit

$$b(e_1, e_1) = 1 \ , \ b(e_1, e_2) = 1 \ , \ b(e_2, e_1) = 2 \quad \text{und} \quad b(e_2, e_2) = 0 \ .$$

Was ist dann $b((2, -1), (1, 1))$?

A. -2

B. 0

C. 1

D. -1

E. 2

---

13. Schreiben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe genau an!

Sei f eine Abbildung mit Definitionsbereich M und Bildbereich N. Dann ist der Graph von f gleich

$$Graph(f) :=$$

$A \in K^{m \times n}$ und $B \in K^{p \times q}$ seien Matrizen mit Koeffizienten in einem Körper K. Welche Bedingung muss für n und p gelten, damit das Matrizenprodukt $A \cdot B$ definiert ist?

Dann ist der Koeffizient in der i-ten Zeile und j-ten Spalte von $A \cdot B$ gleich

$$(A \cdot B)_{ij} :=$$

$A \in K^{m \times n}$ sei eine Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Der Rang von A ist

$$\ldots$$

$A \in K^{n \times n}$ sei eine Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Dann ist die Determinante von A

$$det(A) :=$$

14. Schreiben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe genau an!

$A \in K^{n\times n}$ und $B \in K^{n\times n}$ seien Matrizen mit Koeffizienten in einem Körper K. Die Matrizen A und B sind genau dann ähnlich, wenn ...

Eine Abbildung f von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W ist genau dann linear, wenn ...

Es seien V ein Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Das n-Tupel $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn ...

Es seien $(K, +_K, \cdot_K)$ ein Körper und $(V, +_V, \cdot_V)$ ein K-Vektorraum. Dann ist auch die Menge aller Abbildungen von V nach K mit $+$ und $\cdot$ ein Vektorraum, dabei sind für Abbildungen f, g von V nach K und für $c \in K$ die Abbildungen $f + g$ und $c \cdot f$ wie folgt definiert:

15. Es sei A eine rationale $m \times n$-Matrix und b eine rationale Spalte mit m Zeilen. Durch welche (endlich vielen) Daten wird die Lösungsmenge $L(A, b)$ des durch A und b gegebenen Systems von linearen Gleichungen beschrieben?

Geben Sie diese Daten für die lineare Gleichung $x + 2y - z = 1$ an. Was ist hier A und was ist b?

Formulieren Sie eine Bedingung für b und die Spalten der Matrix A, die notwendig und hinreichend für die Existenz einer Lösung dieses Gleichungssystems ist.

16. Es seien A eine rationale $n \times n$-Matrix. Setzen Sie das Verfahren, eine Matrix in Stufenform zu bringen, als bekannt voraus. Erläutern Sie dann, wie überprüft wird, ob A invertierbar ist und - wenn ja - wie man die zu A inverse Matrix berechnet. Berechnen Sie dann so die zu

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix.

---

17. Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Begründen Sie: Die Menge der Eigenwerte (in K) von A ist die Menge der Nullstellen (in K) des charakteristischen Polynoms χ_A.

---

18. Es seien f eine lineare Abbildung von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W, $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $(w_1, \ldots, w_m)$ eine Basis von W. Wieviele Zeilen und wieviele Spalten hat die Matrix von f bezüglich dieser Basen? Wie ist die j-te Spalte dieser Matrix definiert?

ANSWERKEY FOR “”Beispiel Test LA””

`Version 1:  A  A  C  B  B  A  E  D  D  C  D  E`