Vertiefung Lineare Algebra 1

Schriftliche Unterlagen zur Vorlesung
im Wintersemester 2014/15

Franz Pauer

KAPITEL 1

Vertiefung zu Kap. 2, §3

In diesem Kapitel sei K ein Körper.

§1. Erzeugendensysteme, lineare Unabhängigkeit und Basen

In der Vorlesung „Lineare Algebra 1“ wurde der Begriff *Linearkombination* eines n-Tupels von Vektoren eingeführt. Wir erweitern diesen Begriff nun auf beliebige (auch unendliche) Familien $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren. Die Definition im Skriptum Lineare Algebra 1 entspricht dann dem Spezialfall $I := \{1,\dots,n\}$.

Definition 1 : Sei V ein Vektorraum über K und I eine (beliebige) Menge.
Eine Familie $(c_i)_{i\in I}$ von Elementen in K heißt *Koeffizientenfamilie*, wenn $c_i \neq 0$ für nur endlich viele $i \in I$ ist.
Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in V.
Ein Vektor $w \in V$ heißt eine *Linearkombination* von $(v_i)_{i\in I}$, wenn es eine Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i\in I}$ gibt, sodass

$$w = \sum_{i\in I, c_i\neq 0} c_i v_i$$

ist. Wir schreiben im weiteren einfach

$$\sum_{i\in I} c_i v_i \qquad \text{anstatt} \qquad \sum_{i\in I, c_i\neq 0} c_i v_i\,.$$

Die Menge aller Linearkombinationen von $(v_i)_{i\in I}$ ist ein Untervektorraum von V und enthält alle Vektoren v_i, $i \in I$. Er heißt der *von v_i, $i \in I$, erzeugte Untervektorraum von V* und wird mit

$$_K\langle v_i \mid i \in I\rangle \qquad \text{oder} \qquad \sum_{i\in I} K v_i$$

bezeichnet.

Definition 2 : Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum über K. Eine Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren in V heißt genau dann ein *Erzeugendensystem* von V bzw. *linear unabhängig* in V bzw. eine *Basis* von V, wenn jeder Vektor in V auf mindestens eine bzw. höchstens eine bzw. genau eine Weise als Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$ geschrieben werden kann.
Wir schreiben *linear abhängig* anstatt *nicht linear unabhängig*.
Die leere Menge ist eine *Basis von* $\{0\}$.

Satz 3: *Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum über K und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren in V.*

(1) *Eine Basis von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.*
(2) *Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn*
$$_K\langle v_i \mid i \in I\rangle = V$$
ist.
(3) *Die Familie $(v_i)_{i\in I}$ von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn für jede Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i\in I}$ aus*
$$\sum_{i\in I} c_i v_i = 0$$
folgt, dass
$$c_i = 0 \quad \textit{für alle } i \in I$$
ist.

Beweis:

(1) und (2) folgen aus der Definition der Begriffe Erzeugendensystem, linear unabhängig und Basis.
(3) Wenn sich jeder Vektor aus V auf höchstens eine Weise als Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$ schreiben lässt, dann folgt aus
$$\sum_{i\in I} c_i v_i = 0_V = \sum_{i\in I} 0_K v_i$$
auf Grund der Eindeutigkeit $c_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq n$.
Sei umgekehrt $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig in V und $w \in V$ so, dass es eine Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i\in I}$ mit
$$w = \sum_{i\in I} c_i v_i$$
gibt. Falls $(d_i)_{i\in I}$ eine weitere Koeffizientenfamilie mit
$$w = \sum_{i\in I} d_i v_i$$
ist, erhält man
$$0_V = w - w = \sum_{i\in I} c_i v_i - \sum_{i\in I} d_i v_i = \sum_{i\in I} (c_i - d_i) v_i\,.$$
Nach Annahme folgt $c_i - d_i = 0_K$ für alle $i \in I$, also $c_i = d_i$ für alle $i \in I$.

Beispiel 4: Die Familie
$$(E_{k\ell})_{\substack{1\leq k\leq m\\ 1\leq \ell\leq n}} = (E_{k\ell})_{(k,\ell)\in\{1,\dots,m\}\times\{1,\dots,n\}}$$

der Standard-Matrizen ist eine Basis von $K^{m\times n}$ und heißt die *Standardbasis* von $K^{m\times n}$.

Für $A \in K^{m\times n}$ ist

$$A = \sum_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le \ell\le n}} A_{k\ell}E_{k\ell}\,,$$

also ist A die Koordinatenfamilie von A bezüglich der Standardbasis $(E_{k\ell})_{\substack{1\le k\le m\\ 1\le \ell\le n}}$ (und $A_{k\ell}$ die Koordinate von A bei $E_{k\ell}$).

Beispiel 5 : Es seien I eine endliche Menge und V die Menge aller Funktionen von I in einen Körper K. Für $i \in I$ sei δ_i die durch

$$\delta_i(j) := \delta_{ij},\ j \in I,$$

definierte Funktion von I nach K. Dann ist die Familie

$$(\delta_i)_{i\in I}$$

eine K-Basis von V. Für $f \in V$ ist

$$f = \sum_{i\in I} f(i)\delta_i\,.$$

Beispiel 6 : Es sei K ein Körper und $F := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}}\,|\,a_i \in K, i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Folgen in K. Mit den durch

$$(a_i)_{i\in\mathbb{N}} + (b_i)_{i\in\mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ und } c\cdot(a_i)_{i\in\mathbb{N}} := (ca_i)_{i\in\mathbb{N}}$$

definierten Rechenoperationen wird F zu einem Vektorraum. Mit e_i ($i \in \mathbb{N}$) bezeichnen wir die Folge $(0,\dots,0,1,0,\dots,0,\dots)$, wobei 1 an der i-ten Stelle steht. Die Familie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem von F. Zum Beispiel kann die Folge $(1,1,1,\dots,1,\dots)$ nicht als Linearkombination der Familie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ geschrieben werden.

Der von der Familie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ erzeugte Untervektorraum ist die Menge aller Folgen, von denen nur endlich viele Folgenglieder nicht 0 sind. Er heißt *Vektorraum der endlichen Folgen in K*. Die Familie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Basis dieses Vektorraums, daher ist er unendlich-dimensional.

§2. Rechnen mit Koordinaten

In diesem Abschnitt seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über K, $n \in \mathbb{N}$ die Dimension von V und $\underline{v} := (v_1,\dots,v_n)$ eine Basis von V.

Definition 7 : Seien p und q positive ganze Zahlen und

$$\underline{u} := (u_1,\dots,u_p) \in V^p$$

ein p-Tupel von Vektoren in V. Für $T \in K^{p\times q}$ sei

$$\underline{u}T := \big((\underline{u}T)_1, \dots, (\underline{u}T)_q\big) := \left(\sum_{i=1}^{p} T_{i1}u_i, \dots, \sum_{i=1}^{p} T_{iq}u_i\right) \in V^q.$$

Die Bezeichnung $\underline{u}T$ ist eine Merkhilfe, weil man analog zur Matrizenrechnung über K den Vektor $(\underline{u}T)_j \in V$ nach der Regel

„Zeile $\underline{u}$ mal Spalte T_{-j}“

berechnet.

Satz 8 : *Seien p, q, r positive ganze Zahlen und $\underline{u} := (u_1, \dots, u_p) \in V^p$. Dann gilt:*

(1) $\underline{u}I_p = \underline{u}$
(2) *Für $T \in K^{p\times q}$ und $U \in K^{q\times r}$ ist* $\underline{u}(TU) = (\underline{u}T)U$.
(3) *Für $T \in \mathrm{GL}_p(K)$ und $\underline{u'} := \underline{u}T$ gilt* $\underline{u} = \underline{u'}T^{-1}$.

Beweis: (1) gilt nach Definition, (2) rechnet man nach und (3) folgt aus $\underline{u} = \underline{u}I_p = \underline{u}(TT^{-1}) = (\underline{u}T)T^{-1} = \underline{u'}T^{-1}$.

Definition 9 : Seien $w \in V$ und $c_1, \dots, c_n \in K$ die Koordinaten von w bezüglich $\underline{v}$, also

$$w = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i = \underline{v}c \in V ,$$

Dann heißt die Spalte

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$$

die *Koordinatenspalte* von w bezüglich $\underline{v}$.

Satz 10 : *Sei $\underline{u} := (u_1, \dots, u_q) \in V^q$. Dann gilt:*

(1) *Es gibt genau eine Matrix $T \in K^{n\times q}$ mit*

$$\underline{u} = \underline{v}T .$$

Diese Matrix T heißt die Transformationsmatrix *von $\underline{v}$ zu $\underline{u}$, und die Spalten von T sind die Koordinatenspalten von $u_1, \dots, u_q$ bezüglich $\underline{v}$.*

(2) *Die Familie $\underline{u}$ ist genau dann eine Basis von V, wenn T invertierbar ist.*

Beweis:

(1) Sei $T \in K^{n\times k}$ jene Matrix, die sich durch Nebeneinanderschreiben der Koordinatenspalten von $u_1,\dots,u_k$ bezüglich $\underline{v}$ ergibt. Dann ist $u_j = \underline{v}T_{-j}$ für $1 \le j \le k$, also $\underline{u} = \underline{v}T$. Wenn umgekehrt $\underline{u} = \underline{v}S$ mit $S \in K^{n\times k}$ ist, d.h. $u_j = \underline{v}S_{-j}$ für $1 \le j \le k$, dann ist S_{-j} die Koordinatenspalte von u_j bezüglich $\underline{v}$ für $1 \le j \le k$.

(2) Wenn $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ ist, dann ist $\underline{v} = \underline{u}T^{-1}$ nach Satz 8, also sind die Vektoren $v_1,\dots,v_n$ Linearkombinationen von $u_1,\dots,u_n$, somit ist ${}_K\langle u_1,\dots,u_n\rangle = V$ und, weil V n-dimensional ist, $(u_1,\dots,u_n)$ eine Basis von V. Wenn umgekehrt $\underline{u}$ eine Basis von V ist, dann gibt es eine Matrix $U \in K^{n\times n}$ mit $\underline{v} = \underline{u}U$. Weil $\underline{u}$ eine Basis ist, folgt aus $\underline{u}I_n = \underline{v}T = \underline{u}(UT)$, dass $UT = I_n$ ist und analog $TU = I_n$, also ist $T \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Satz 11 : *Sei $\underline{u}$ eine Basis von V und $T \in \mathrm{GL}_n(K)$ die Transformationsmatrix von $\underline{v}$ zu $\underline{u}$. Ist c die Koordinatenspalte von $w \in V$ bezüglich $\underline{v}$, dann ist*

$$T^{-1}c$$

die Koordinatenspalte von w bezüglich $\underline{u}$, d.h. bei Basiswechsel mit der Matrix T „transformieren sich die Koordinaten“ mit der Matrix T^{-1}.

Beweis: Es ist $w = \underline{v}c = (\underline{u}T^{-1})c = \underline{u}(T^{-1}c)$.

Beispiel 12 : Wir betrachten die Ebene E nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum. Wir wählen Punkte P_1, P_2 so, dass $\underline{P} := (P_1,P_2)$ eine Basis von E ist. Es sei

$$\underline{Q} := (Q_1,Q_2) := (\frac{3}{2}P_1 + 2P_2, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2).$$

Dann ist $\underline{Q} = \underline{P}T$, wobei

$$T := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist. Man prüft leicht nach, dass T invertierbar ist und dass

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

ist. Daher ist $\underline{P} = \underline{Q}T^{-1} = (-2Q_1 + 8Q_2, 2Q_1 - 6Q_2)$.

Der Punkt $P_1 + 2P_2$ hat bezüglich $\underline{P}$ die Koordinatenspalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und bezüglich $\underline{Q}$ die Koordinatenspalte $T^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.
Somit ist $P_1 + 2P_2 = 2Q_1 - 4Q_2$.

KAPITEL 2

Vertiefung zu Kap. 3, §2

§1. Strahlensatz

Satz 13 : *(„Strahlensatz“)*
Es seien Z_1, Z_2 zwei verschiedene, einander im Punkt 0 *schneidende Geraden in V, v_1, v_2 Punkte auf $Z_1 \setminus \{0\}$ und w_1, w_2 Punkte auf $Z_2 \setminus \{0\}$. Dann gibt es c, $d \in K \setminus \{0\}$ so, dass*

$$v_2 = cv_1 \quad \textit{und} \quad w_2 = dw_1$$

ist. Mit L_1 bzw. L_2 bezeichnen wir die Geraden durch die Punkte v_1 und w_1 bzw. v_2 und w_2. Dann gilt:

(1) *L_1 und L_2 sind genau dann parallel, wenn $c = d$ ist.*
(2) *Wenn L_1 und L_2 parallel sind, dann ist $v_2 - w_2 = c(v_1 - w_1)$.*

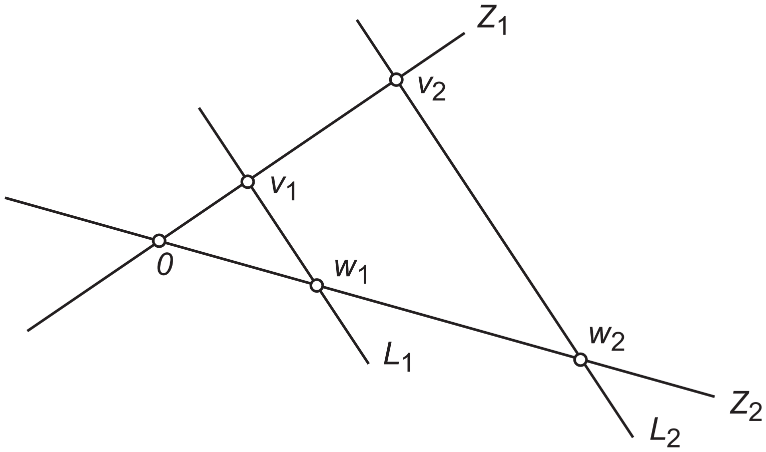


ABBILDUNG 1. Strahlensatz

Beweis:

(1) Der zu L_1 bzw. L_2 parallele Untervektorraum ist $K(v_1 - w_1)$ bzw. $K(cv_1 - dw_1)$. Weil die Geraden Z_1 und Z_2 verschieden sind, sind die Vektoren v_1 und w_1 linear unabhängig. Daher ist $K(v_1 - w_1)$ genau dann gleich $K(cv_1 - dw_1)$, wenn $c = d$ ist.

(2) Wenn L_1 und L_2 parallel sind, ist $c = d$ und

$$v_2 - w_2 = cv_1 - cw_1 = c(v_1 - w_1) \ .$$

Satz 14 : *Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K und $Z_1 = p_1 + U_1$, $Z_2 = p_2 + U_2$ affine Unterräume von V mit Aufpunkten p_1, p_2 und parallelen Untervektorräumen U_1, U_2. Wenn Z_1 und Z_2 parallel sind, dann ist $Z_1 \subseteq Z_2$ oder $Z_2 \subseteq Z_1$ oder $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.*

Beweis: Wir nehmen o.E.d.A. an, dass $U_1 \subseteq U_2$ ist. Wenn $Z_1 \cap Z_2$ nicht leer ist, dann gibt es ein $p \in Z_1 \cap Z_2$. Daher ist $Z_1 = p + U_1 \subseteq p + U_2 = Z_2$.

§2. Affine Hülle

Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K.

Definition 15 : Es seien I eine endliche Menge und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V. Eine Linearkombination $\sum_{i \in I} c_i v_i$ von $(v_i)_{i \in I}$ heißt *affine Kombination* von $(v_i)_{i \in I}$, wenn $\sum_{i \in I} c_i = 1$ ist. Die Menge aller affinen Linearkombinationen von $(v_i)_{i \in I}$ heißt *affine Hülle* von $(v_i)_{i \in I}$.

Beispiel 16 : Die affine Hülle von zwei Vektoren v_1 und v_2 ist ein Punkt, wenn $v_1 = v_2$ ist, bzw. die Gerade

$$\{c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \in K, c_1 + c_2 = 1\} = \{v_1 + c(v_2 - v_1) \mid c \in K\},$$

wenn $v_1 \neq v_2$ ist.

Satz 17 :

(1) *Es seien M ein affiner Unterraum von V und $(v_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie in M. Dann ist die affine Hülle von $(v_i)_{i \in I}$ in M enthalten.*
(2) *Die affine Hülle einer Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V ist ein affiner Unterraum von V. Der dazu parallele Untervektorraum wird von $(v_i - v_j)_{i \in I,\, i \neq j}$ erzeugt, wobei $j \in I$ beliebig gewählt werden kann.*
(3) *Die affine Hülle von $(v_i)_{i \in I}$ ist der (bezüglich Inklusion) kleinste affine Unterraum, der alle v_i, $i \in I$, enthält.*

Beweis:

(1) Sei $p \in M$, U der zu M parallele Untervektorraum und $(c_i)_{i\in I}$ eine Familie in K mit $\sum_{i\in I} c_i = 1$. Dann ist

$$\sum_{i\in I} c_i v_i = \left(\sum_{i\in I} c_i\right) p - \left(\sum_{i\in I} c_i\right) p + \sum_{i\in I} c_i v_i =$$
$$= p + \sum_{i\in I} c_i (v_i - p) \in p + U = M.$$

(2) Sei $j \in I$ und

$$M := v_j + {}_K\langle v_i - v_j;\, i \in I,\, i \neq j\rangle.$$

Dann ist $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in M und nach (1) ist ihre affine Hülle in M enthalten.
Sei umgekehrt $(d_i)_{i\in I}$ eine Familie in K.
Dann ist

$$v_j + \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} d_i(v_i - v_j) = \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} d_i v_i + \left(1 - \sum_{\substack{i\in I\\ i\neq j}} d_i\right) v_j$$

eine affine Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$. Daher ist jedes Element von M in der affinen Hülle von $(v_i)_{i\in I}$ enthalten.

(3) Folgt aus (1) und (2).

Definition 18 : Affine Unterräume von V heißen *kollinear* bzw. *koplanar*, wenn sie alle in einer Geraden bzw. Ebene in V enthalten sind.

Satz 19 :

(1) *Drei Punkte v_1, v_2, $v_3 \in V$ sind genau dann kollinear, wenn die Vektoren $v_2 - v_1$ und $v_3 - v_1$ linear abhängig sind.*
(2) *Vier Punkte v_1, v_2, v_3, $v_4 \in V$ sind genau dann koplanar, wenn die Vektoren $v_2 - v_1$, $v_3 - v_1$ und $v_4 - v_1$ linear abhängig sind.*
(3) *Zwei Geraden $p_1 + Kv_1$ und $p_2 + Kv_2$ sind genau dann koplanar, wenn die Vektoren $p_1 - p_2$, v_1 und v_2 linear abhängig sind.*

Beweis: Die ersten zwei Aussagen folgen aus Satz 17, (2). Der zur affinen Hülle von $(p_1, p_2, p_1 + v_1, p_2 + v_2)$ parallele Untervektorraum wird von $p_1 - p_2$, v_1 und v_2 erzeugt.

Satz 20 : *Zwei verschiedene koplanare Geraden schneiden einander in genau einem Punkt oder sie sind parallel.*

Beweis: Seien M_1 und M_2 verschiedene koplanare Geraden und E die Ebene, die beide enthält. Wenn M_1 und M_2 nicht parallel sind, dann ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ ist der zu E parallele Untervektorraum. Wegen $p_1,\ p_2 \in E$ ist $p_1 - p_2 \in U_1 \oplus U_2$, daher gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u_1 \in U_1,\ u_2 \in U_2$ so, dass $p_1 - p_2 = u_1 + u_2$ ist. Somit ist $M_1 \cap M_2 = \{p_1 - u_1\} = \{p_2 + u_2\}$.

§3. Polytope und Schwerpunkte

Es seien $K = \mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$ und V ein Vektorraum über K.

Definition 21 : Es seien I eine endliche Menge und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in V.
Eine Linearkombination $\sum\limits_{i\in I} c_i v_i$ von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *konvexe Linearkombination* von $(v_i)_{i\in I}$, wenn $\sum\limits_{i\in I} c_i = 1$ und $c_i \geq 0$ für alle $i \in I$ ist.
Die Menge der konvexen Linearkombinationen von $(v_i)_{i\in I}$ heißt *konvexe Hülle* von $(v_i)_{i\in I}$.
Die konvexe Hülle zweier Vektoren v_1, v_2 heißt *Strecke* zwischen v_1 und v_2.
Die konvexe Hülle dreier nicht kollinearer Punkte v_1, v_2, v_3 heißt *Dreieck* mit Eckpunkten v_1, v_2, v_3 .
Eine Teilmenge von V heißt *Polytop*, wenn sie die konvexe Hülle einer endlichen Familie in V ist.

Es sei $I := \{1,\ldots,n\}$ und $c_1,\ldots,c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $c_n \neq 1$ ist

$$\sum_{i=1}^{n} c_i v_i = (1-c_n)\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1-c_n} v_i\right) + c_n v_n = (1-c_n)w + c_n v_n\,,$$

wobei $w := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1-c_n} v_i$ in der konvexen Hülle H von $(v_1,\ldots,v_{n-1})$ liegt. Daraus folgt: Für $n \geq 3$ ist die konvexe Hülle von $(v_1,\ldots,v_n)$ die Vereinigung aller Strecken zwischen v_n und den Elementen von H.

Beispiel 22 : Eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist genau dann ein Polytop, wenn sie ein abgeschlossenes Intervall ist.

Satz 23 : *Es seien P die konvexe Hülle einer Familie $\left(w_j\right)_{j\in J}$ in V und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie in P. Dann ist die konvexe Hülle von $(v_i)_{i\in I}$ in P enthalten.*

Beweis: Für alle $i \in I$ ist der Vektor v_i eine konvexe Linearkombination $\sum_{j\in J} c_{ji} w_j$ von $(w_j)_{j\in J}$.

Sei $\sum_{i\in I} d_i v_i$ eine konvexe Linearkombination von $(v_i)_{i\in I}$. Dann ist

$$\sum_{i\in I} d_i v_i = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} d_i c_{ji} w_j = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} d_i c_{ji}\right) w_j$$

mit $\sum_{i\in I} d_i c_{ji} \geq 0,$ für alle $j \in J$, und

$$\sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} d_i c_{ji}\right) = \sum_{i\in I} d_i \left(\sum_{j\in J} c_{ji}\right) = \sum_{i\in I} d_i = 1 \ .$$

Daher ist $\sum_{i\in I} d_i v_i \in P$.

Definition 24 : Es sei $(v_i)_{i\in I}$ eine endliche Familie in V .
Der *Schwerpunkt* von $(v_i)_{i\in I}$ ist

$$\frac{1}{\#(I)} \sum_{i\in I} v_i \ .$$

Der Schwerpunkt von (v_1, v_2) heißt *Mittelpunkt der Strecke* zwischen v_1 und v_2.

Satz 25 : *Es seien u,v,w drei nicht kollineare Punkte in V . Die Gerade durch u bzw. v bzw. w und den Mittelpunkt der Strecke zwischen den anderen zwei Punkten heißt* Schwerlinie *des Dreiecks mit Eckpunkten u,v,w durch u bzw. v bzw. w.*
Die drei Schwerlinien sind paarweise verschieden und schneiden einander im Schwerpunkt $\frac{1}{3}(u+v+w)$ von (u,v,w) .

Beweis: Da u,v,w nicht kollinear sind, sind nach Satz 19 die Vektoren $v-u$ und $w-u$ linear unabhängig. Also sind auch

$$v-u \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(v-u)+\frac{1}{2}(w-u) = \frac{1}{2}(v+w)-u$$

linear unabhängig, nach Satz 19 sind daher $u, v, \frac{1}{2}(v+w)$ nicht kollinear. Somit liegt v nicht auf der Schwerlinie durch u . Daher sind die Schwerlinien durch u und durch v verschieden und die drei Schwerlinien haben höchstens einen Schnittpunkt. Wegen

$$\frac{1}{3}(u+v+w) = \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(v+w)\right) = \frac{1}{3}v + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(u+w)\right) = $$
$$= \frac{1}{3}w + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(u+v)\right)$$

liegt der Schwerpunkt auf allen Schwerlinien.

§4. Affine Räume

Definition 26 : Es seien $(G,\star)$ eine Gruppe mit neutralem Element e und M eine Menge. Eine Funktion $G \times M \longrightarrow M$, $(s,m) \longmapsto s \cdot m$, ist eine *Operation der Gruppe G auf der Menge M*, wenn gilt:
für alle $m \in M$ ist $e \cdot m = m$ und
für alle $s,t \in G$ und alle $m \in M$ ist $(s \star t) \cdot m = s \cdot (t \cdot m)$.

Beispiel 27 : Die Funktion

$$S_n \times \{1,2,\dots,n\} \to \{1,2,\dots,n\}, \ (\sigma,i) \mapsto \sigma(i),$$

ist eine Operation der Permutationsgruppe S_n auf der Menge $\{1,2,\dots,n\}$.

Definition 28 : Sei V ein Vektorraum über einem Körper K, A eine Menge und

$$V \times A \to A, \ (v,a) \mapsto v \cdot a,$$

eine Operation der Gruppe $(V,+)$ auf A. (Also: Für alle $a \in A$, $v,w \in V$ ist $0 \cdot a = a$ und $(v+w) \cdot a = v \cdot (w \cdot a)$.
A zusammen mit dieser Operation ist ein *affiner Raum über V*, wenn es für alle Elemente $a,b \in A$ genau einen Vektor $v \in V$ gibt mit $v \cdot a = b$.
Die Elemente von A heißen dann *Punkte*, die Elemente von V *Vektoren* des affinen Raums.

Satz 29 : *Sei A ein affiner Raum über V und $a \in A$. Die Funktion*

$$V \longrightarrow A, \ v \longmapsto v \cdot a,$$

ist bijektiv. (Nach Wahl eines „Nullpunktes“ kann ein affiner Raum als Vektorraum betrachtet werden).

Beweis: Folgt aus der Definition.

Beispiel 30 : Sei V ein Vektorraum, $p \in V$ und U ein Untervektorraum von V. Dann ist der affine Unterraum $p+U$ mit

$$U \times (p+U) \longrightarrow p+U \ \ (v, p+u) \longmapsto p+(u+v)\,,$$

ein affiner Raum über U. Insbesondere ist jeder Vektorraum ein affiner Raum (über sich selbst).

Beispiel 31 : Sie E die Zeichenebene oder der Anschauungsraum und $T(E)$ der Vektorraum der Translationen von E. Dann ist E mit

$$T(E) \times E \longrightarrow E\,,\ (t,x) \longmapsto t(x)\,,$$

ein affiner Raum über $T(E)$.
Möchte man in der Zeichenebene keinen „Nullpunkt" wählen, kann man sie als affinen Raum betrachten. Dann muss man zwischen Punkten ($\in E$) und Vektoren ($\in T(E)$) unterscheiden. Punkte können dann nicht addiert werden, aber Vektoren können addiert werden und auf Punkten „wirken".

Sind P und Q Punkte von E und $P \neq Q$, dann gibt es genau eine Translation in $T(E)$, die P auf Q abbildet. Sie wird häufig mit $\vec{PQ}$ bezeichnet. Die Menge

$$\{t\vec{PQ} \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq T(E)$$

ist die Gerade durch $0_{T(E)} = id_E$ und $\vec{PQ}$ in $T(E)$. Die „Gerade durch P und Q in E" ist dann als

$$\{(t\vec{PQ})(P) \,|\, t \in \mathbb{R}\} \subseteq E$$

definiert. Wegen $(\vec{PQ})(P) = Q$ und $(0 \cdot \vec{PQ})(P) = id_E(P) = P$ sind P und Q Punkte dieser Geraden. Die Translation $\vec{PQ}$ wird als „Richtungsvektor" dieser Geraden bezeichnet.

KAPITEL 3

Vertiefung zu Kap. 3, §3-5

§1. Mehr über Skalarprodukte

In diesem Abschnitt sei V ein reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf V.

Definition 32 : Ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *reeller Prähilbertraum*. Ein endlich-dimensionaler reeller Prähilbertraum heißt *euklidischer Raum*.

Beispiel 33 : (Für Studierende mit Kenntnissen aus Analysis). Es seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und V der Vektorraum aller stetigen Funktionen vom Intervall $[a, b]$ nach $\mathbb{R}$. Die Funktion

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R} \ , \quad (f, g) \longmapsto \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx \ ,$$

ist ein Skalarprodukt auf V. Die Norm von $f \in V$ ist

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx} \quad .$$

Satz 34 : *(Parallelogrammgleichung) Für alle Vektoren v und w in einem reellen Prähilbertraum ist*

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2 .$$

Beweis: Nachrechnen.

Definition 35 : Eine *Norm* auf V ist eine Funktion

$$N : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} := \{t \in \mathbb{R} \,|\, t \geq 0\} \ , \ v \longmapsto N(v) \ ,$$

mit den Eigenschaften:

(1) Es ist $N(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
(2) Für alle $c \in \mathbb{R}$, $v \in V$ ist $N(cv) = |c| N(v)$.
(3) Für alle $v, w \in V$ ist $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

V zusammen mit einer Norm heißt *normierter Raum* .

Beispiel 36 : Ist $\langle -,- \rangle$ ein Skalarprodukt auf V, dann ist

$$\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad v \longmapsto \|v\| := \sqrt{\langle v,v \rangle},$$

eine Norm.

Beispiel 37 : Die Funktion

$$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \ , \ (c_1, c_2, \ldots, c_n) \longmapsto \sum_{i=1}^{n} |c_i| \ ,$$

ist eine Norm (die „Summennorm") auf $\mathbb{R}^n$.
Die Parallelogrammgleichung gilt für diese Norm nicht, zum Beispiel ist für $n = 2$, $v := (2,1)$ und $w := (1,2)$:
$N(v+w)^2 + N(v-w)^2 = 36 + 4 = 40$, aber
$2 \cdot N(v)^2 + 2 \cdot N(w)^2 = 18 + 18 = 36$.

Satz 38 : *N sei eine Norm auf V.*
Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) *Die Parallelogrammgleichung gilt für N, dh.: Für alle $v,w \in V$ ist $N(v+w)^2 + N(v-w)^2 = 2 \cdot N(v)^2 + 2 \cdot N(w)^2$.*
(2) *Es gibt ein Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$, das die Norm N induziert, dh.: für alle $v \in V$ ist $N(v) = \sqrt{\langle v,v \rangle}$.*

In diesem Fall ist dieses Skalarprodukt von $v,w \in V$ durch

$$\langle v,w \rangle := \frac{1}{4}(N(v+w)^2 - N(v-w)^2)$$

definiert.

Beweis: Wenn (2) gilt, dann folgt (1) aus Satz 34.
Wenn (1) gilt, dann kann damit nachgeprüft werden, dass die oben definierte Funktion $\langle -,- \rangle$ die Eigenschaften eines Skalarproduktes hat.

Definition 39 : Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt *orthonormal* bezüglich $\langle -,- \rangle$, wenn für alle $i, j \in I$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt *Orthonormalbasis* (kurz: *ON-Basis*) von V bezüglich $\langle -,- \rangle$, wenn sie eine Basis von V und orthonormal bezüglich $\langle -,- \rangle$ ist.

Beispiel 40 : Es sei V der Vektorraum der endlichen Folgen in $\mathbb{R}$. Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit e_i die Folge $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0,\ldots)$, wobei 1 an der i-ten Stelle steht. Die Familie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine Basis von V. Durch

$$\langle a,b\rangle := \sum_{i\in\mathbb{N}} a_i b_i \text{, für alle Folgen } a,b \text{ in } \mathbb{N}$$

wird ein Skalarprodukt auf V definiert. Die Familie $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist eine ON-Basis bezüglich dieses Skalarproduktes.

Satz 41 : *Eine orthonormale Familie ist linear unabhängig.*
Insbesondere: Wenn V endlich-dimensional ist, dann ist jede orthonormale Familie mit $\dim_K(V)$ *Elementen eine ON-Basis von V.*

Beweis: Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine orthonormale Familie und $(c_i)_{i\in I}$ eine Koeffizienten-Familie in K. Wenn $\sum_{i\in I} c_i v_i = 0$ ist, dann ist für alle $j \in I$ auch

$$0 = \langle v_j, \sum_{i\in I} c_i v_i\rangle = \sum_{i\in I} c_i \langle v_j, v_i\rangle = c_j \ .$$

Satz 42 : *Sei $w \in V$ und $(v_i)_{i\in I}$ eine ON-Basis von V. Dann ist*

$$w = \sum_{i\in I} \langle v_i, w\rangle v_i \ .$$

(„Die Koordinate von w bei v_i ist das Skalarprodukt von v_i mit w“.)

Beweis: Sei $w = \sum_{i\in I} c_i v_i$. Dann ist

$$\langle v_j, w\rangle = \langle v_j, \sum_{i\in I} c_i v_i\rangle = \sum_{i\in I} c_i \langle v_j, v_i\rangle = \sum_{i\in I} c_i \delta_{ji} = c_j \ .$$

§2. Interpolationsaufgaben

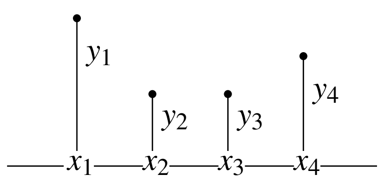
Wir betrachten die folgenden *Interpolationsaufgaben*:
Gegeben sind

- Funktionen $f_1,\dots,f_k$ von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$,
- paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ und
- reelle Zahlen $y_1,\dots,y_n \in \mathbb{R}$.

Gesucht sind reelle Zahlen $c_1,\dots,c_k$ so, dass die Funktion $f := \sum_{i=1}^k c_i f_i$ die Bedingungen

$$f(x_1) = y_1,\ f(x_2) = y_2,\ \dots,\ f(x_n) = y_n$$

erfüllt.



Durch die Funktionen $f_1, \ldots, f_k$ wird der „Typ“ der Interpolationsaufgabe vorgegeben. Die reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ heißen *Stützstellen*, die reellen Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ *(Funktions-)Werte* der Interpolationsaufgabe. Die gesuchte Funktion f heißt *interpolierende Funktion*.

Wir suchen also eine Funktion f des vorgegebenen Typs so, dass die Funktionswerte von f in den Stützstellen die vorgegebenen Werte der Interpolationsaufgabe sind.

Anders formuliert: Wir suchen Zahlen $c_1, \ldots, c_k$ so, dass

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1)c_1 + f_2(x_1)c_2 + \ldots + f_k(x_1)c_k & = & y_1 \\ f_1(x_2)c_1 + f_2(x_2)c_2 + \ldots + f_k(x_2)c_k & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n)c_1 + f_2(x_n)c_2 + \ldots + f_k(x_n)c_k & = & y_n \end{array}$$

ist. Das ist ein System von n linearen Gleichungen mit k Unbekannten $c_1, \ldots, c_k$. In Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \ldots & f_k(x_1) \\ f_1(x_2) & \ldots & f_k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & \ldots & f_k(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Beispiel 43 : („Lineare Interpolation“).
Wenn f_1 die konstante Funktion 1 (also die Funktion, die jeder Zahl die Zahl 1 zuordnet) und f_2 die Identität (also die Funktion, die jeder Zahl sich selbst zuordnet) ist, dann suchen wir eine Funktion $f := c_1 f_1 + c_2 f_2$ mit

$$(f(x_i) =)\ c_1 + c_2 x_i = y_i\,,\ 1 \leq i \leq n\,.$$

Die Aufgabe, Zahlen c_1 und c_2 mit den Eigenschaften

$$\begin{array}{rcl} c_1 + c_2 x_1 & = & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 + c_2 x_n & = & y_n \end{array}$$

zu finden, ist ein System von n linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten. In Matrizenform

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

Beispiel 44 : (Interpolation durch Polynomfunktionen).
Für $1 \leq i \leq k$ sei $f_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto z^{i-1}$, die $i-1$-te Potenzfunktion. Dann ist die gesuchte Funktion f eine Polynomfunktion vom Grad $k-1$, also $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto c_1 + c_2 z + \ldots + c_k z^{k-1}$.

Wir suchen reelle Zahlen $c_1, c_2, \ldots, c_k$ mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{array}{rcl} c_1 + x_1 c_2 + \ldots + x_1^{k-1} c_k & = & y_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ c_1 + x_n c_2 + \ldots + x_n^{k-1} c_k & = & y_n \end{array}$$

ist, müssen also ein System von n Gleichungen mit k Unbekannten lösen. In Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \ldots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & \ldots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \ldots & x_n^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} .$$

§3. Systeme linearer Gleichungen (mit und ohne Lösung)

Das System

$$\begin{array}{rcl} f_1(x_1)c_1 + f_2(x_1)c_2 + \ldots + f_k(x_1)c_k & = & y_1 \\ f_1(x_2)c_1 + f_2(x_2)c_2 + \ldots + f_k(x_2)c_k & = & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n)c_1 + f_2(x_n)c_2 + \ldots + f_k(x_n)c_k & = & y_n \end{array}$$

von k linearen Gleichungen mit den Unbekannten $c_1, \ldots, c_k$ kann auch in der Form

$$c_1 \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_1(x_n) \end{pmatrix} + \ldots + c_k \begin{pmatrix} f_k(x_1) \\ \vdots \\ f_k(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

oder, mit den Abkürzungen

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f_i}(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} f_i(x_1) \\ \vdots \\ f_i(x_n) \end{pmatrix}, 1 \leq i \leq k,$$

kurz als

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{f_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

angeschrieben werden.

Wir können also das System linearer Gleichungen als die folgende Aufgabe interpretieren: Schreibe die Spalte $\mathbf{y}$ als Linearkombination $\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{f_i}(\mathbf{x})$ der Spalten $\mathbf{f_i}(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq k$. Das ist aber nur dann möglich, wenn $\mathbf{y}$ in dem von den Spalten $\mathbf{f_i}(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq k$, erzeugten Untervektorraum U von $\mathbb{R}^{n \times 1}$ enthalten ist. Wenn das nicht der Fall ist, ist dieses System linearer Gleichungen nicht lösbar.

Im Fall von Beispiel „Lineare Interpolation“ ist U die von

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

erzeugte Ebene in $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Im Fall von Beispiel „Interpolation durch Polynomfunktionen vom Grad $\leq k$“ ist U der von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ \vdots \\ x_n^{k-1} \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n\times 1}$.

Wenn die Interpolationsaufgabe einerseits eine Situation beschreibt, von der man weiß, dass es eine Lösung gibt, andererseits die Aufgabe aber nicht lösbar ist, weil $\mathbf{y}$ mit Mess- oder Rundungsfehlern behaftet ist, liegt es nahe, dass $\mathbf{y}$ „eigentlich“ ein Element von U sein sollte. Wir erzwingen die Lösbarkeit der Aufgabe, indem wir $\mathbf{y}$ durch eine Spalte $\mathbf{y}'$ in U ersetzen!

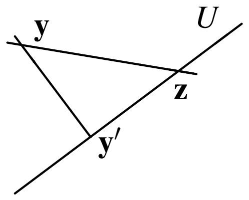
Wie sollen wir diese Spalte $\mathbf{y}'$ aber wählen? Am einfachsten ist es, $\mathbf{y}'$ in U so zu wählen, dass der Abstand zwischen $\mathbf{y}'$ und $\mathbf{y}$ möglichst klein ist. Wir suchen also ein Element des Vektorraums U so, dass der Abstand $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|$ zwischen $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}'$ so klein wie möglich ist. Wir müssen nun festlegen, welchen Abstand wir meinen: Wenn wir den (durch das Standardskalarprodukt auf dem $\mathbb{R}^n$ induzierten) euklidischen Abstand im $\mathbb{R}^n$ wählen, dann ist

$$\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i' - y_i)^2}\,.$$

Für positive reelle Zahlen a und b ist $a \leq b$ genau dann, wenn $a^2 \leq b^2$ ist. Daher ist der $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|$ genau dann minimal, wenn die Summe $\sum_{i=1}^{n} (y_i' - y_i)^2$ der „Fehlerquadrate“ minimal ist.
Die Spalte $\mathbf{y}'$ ist der Fußpunkt des Lotes von $\mathbf{y}$ auf U.

§4. Lineare Regression

Genau dann ist der Abstand zwischen $\mathbf{y}'$ und $\mathbf{y}$ kleiner oder gleich dem Abstand zwischen $\mathbf{y}$ und jedem anderen Element $\mathbf{z}$ von U, wenn die Gerade durch $\mathbf{y}'$ und $\mathbf{y}$ normal zum Untervektorraum U steht. Das folgt leicht aus dem Satz von Pythagoras:



Das Dreieck mit den Eckpunkten $\mathbf{y}'$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ hat bei $\mathbf{y}'$ einen rechten Winkel. Der Abstand zwischen $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ ist die Länge der Hypotenuse, also größer oder gleich der Länge einer Kathete, also dem Abstand zwischen $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}'$.

Die Gerade durch $\mathbf{y}'$ und $\mathbf{y}$ steht genau dann normal zu U, wenn alle Skalarprodukte von $\mathbf{y}'-\mathbf{y}$ mit den erzeugenden Spalten von U gleich 0 sind. Für $\mathbf{y}'=\sum_{i=1}^{k} c_i \mathbf{f_i}(\mathbf{x}) \in U$ muss also gelten:

$$\langle \mathbf{y}'-\mathbf{y}, \mathbf{f_j}(\mathbf{x})\rangle = 0,\ 1 \le j \le k.$$

Anders geschrieben:

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \langle \mathbf{f_i}(\mathbf{x}), \mathbf{f_j}(\mathbf{x})\rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{f_j}(\mathbf{x})\rangle,\ 1 \le j \le k.$$

Wenn wir dieses System von k linearen Gleichungen mit k Unbekannten $c_1,\dots,c_k$ lösen, dann erhalten wir die „annähernd“ interpolierende Funktion $f=\sum_{i=1}^{k} c_i f_i$.

Bei linearer Interpolation ist

- $\mathbf{y}' = c_2\mathbf{x} + c_1\mathbf{1} \in U$ und
- die Gerade durch $\mathbf{y}$ und $\mathbf{y}'$ steht normal auf der von $\mathbf{x}$ und $\mathbf{1}$ erzeugten Ebene U.

Also ist

- $\langle c_2\mathbf{x}+c_1\mathbf{1}-\mathbf{y}, \mathbf{x}\rangle = 0$ und
- $\langle c_2\mathbf{x}+c_1\mathbf{1}-\mathbf{y}, \mathbf{1}\rangle = 0$.

Daraus erhalten wir das folgende System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten c_1 und c_2:

- $c_2\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle + c_1\langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle$
- $c_2\langle \mathbf{x},\mathbf{1}\rangle + c_1\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle = \langle \mathbf{1},\mathbf{y}\rangle$

Als Lösung erhalten wir

$$c_2 = \frac{\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle.\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle.\langle \mathbf{1},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle.\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle^2} \quad \text{und} \quad c_1 = \frac{\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle.\langle \mathbf{1},\mathbf{y}\rangle - \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle.\langle \mathbf{x},\mathbf{y}\rangle}{\langle \mathbf{1},\mathbf{1}\rangle.\langle \mathbf{x},\mathbf{x}\rangle - \langle \mathbf{1},\mathbf{x}\rangle^2}.$$

Wenn $\langle -,- \rangle$ das Standard-Skalarprodukt ist, dann ist $\langle \mathbf{x},\mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\langle \mathbf{1},\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i$, $\langle \mathbf{1},\mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n y_i$, $\langle \mathbf{1},\mathbf{1} \rangle = n$, $\langle \mathbf{x},\mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$ und $\langle \mathbf{y},\mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n y_i^2$, daher

$$c_2 = \frac{n\sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

und

$$c_1 = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n\sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} .$$

Wir haben damit die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto c_2 z + c_1$, so bestimmt, dass der (euklidische) Abstand vom n-Tupel der gegebenen (gemessenen oder gerundeten) ungenauen Funktionswerte $(y_1,\ldots,y_n)$ zum n-Tupel der berechneten Funktionswerte $(f(x_1),\ldots,f(x_n))$ möglichst klein ist, also $\sum_{i=1}^n (y_i - (c_2 x_i + c_1))^2$ möglichst klein ist. Der Graph dieser Funktion heißt *Regressionsgerade* oder *Trendlinie* der Punkte $(x_1,y_1),(x_2,y_2),\ldots,(x_n,y_n)$. Man rechnet leicht nach, dass

$$f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n y_i$$

ist. Das Paar der arithmetischen Mittel von $(x_1,\ldots,x_n)$ und $(y_1,\ldots,y_n)$ liegt also immer auf der Regressionsgeraden.

KAPITEL 4

Mehr über lineare Funktionen

In diesem Kapitel sei K ein Körper.

§1. Der Graph einer linearen Funktion

Satz 45 : *Seien $V_1, \dots, V_\ell$ Vektorräume über K. Dann wird das kartesische Produkt*

$$V_1 \times \cdots \times V_\ell = \{(x_1, \dots, x_\ell) \mid x_1 \in V_1, \dots, x_\ell \in V_\ell\}$$

mit der komponentenweisen Addition

$$(x_1, \dots, x_\ell) + (y_1, \dots, y_\ell) := (x_1 + y_1, \dots, x_\ell + y_\ell)$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$c(x_1, \dots, x_\ell) := (cx_1, \dots, cx_\ell)$$

mit $c \in K$ ein Vektorraum und heißt der Produktraum *von $V_1, \dots, V_\ell$.*

Wenn $(v_{11}, \dots, v_{1n_1}), \dots, (v_{\ell 1}, \dots, v_{\ell n_\ell})$ Basen von $V_1, \dots, V_\ell$ sind, dann ist

$$\begin{gathered}((v_{11}, 0, \dots, 0), \dots, (v_{1n_1}, 0, \dots, 0), \dots \\ \dots, ((0, \dots, 0, v_{\ell 1}), \dots, (0, \dots, 0, v_{\ell n_\ell}))\end{gathered}$$

eine Basis von $V_1 \times \cdots \times V_\ell$, insbesondere gilt

$$\dim_K(V_1 \times \cdots \times V_\ell) = \dim_K(V_1) + \cdots + \dim_K(V_\ell)\,.$$

Beweis: Es ist leicht zu zeigen, dass $V_1 \times \cdots \times V_\ell$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Wir beweisen daher nur, dass
$((v_{11}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, v_{\ell n_\ell}))$ eine Basis von $V_1 \times \cdots \times V_\ell$ ist. Wir schreiben $x_1 \in V_1, \dots, x_\ell \in V_\ell$ als Linearkombinationen der Basen $(v_{11}, \dots, v_{1n_1}), \dots, (v_{\ell 1}, \dots, v_{\ell n_\ell})$:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_1} d_{1i} v_{1i}, \; \dots, x_\ell = \sum_{i=1}^{n_\ell} d_{\ell i} v_{\ell i}\,.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}(x_1, \dots, x_\ell) &= (x_1, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, x_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} d_{1i}(v_{1i}, 0, \dots, 0) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_\ell} d_{\ell i}(0, \dots, 0, v_{\ell i})\end{aligned}$$

und $((v_{11},0,\dots,0),\dots,(0,\dots,0,v_{\ell n_\ell}))$ ein Erzeugendensystem von $V_1\times\cdots\times V_\ell$. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, seien $c_{11},\dots,c_{\ell n_\ell}\in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}(v_{1i},0,\dots,0)+\cdots+\sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}(0,\dots,0,v_{\ell i})=(0,\dots,0)\,.$$

Dann ist

$$(\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}v_{1i},\dots,\sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}v_{\ell i})=(0,\dots,0)\,,$$

also

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}v_{1i}=0\,,\ \dots\ ,\ \sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}v_{\ell i}=0\,.$$

Da $(v_{11},\dots,v_{1n_\ell}),\dots,(v_{\ell 1},\dots,v_{\ell n_\ell})$ Basen von $V_1,\dots,V_\ell$ sind, folgt $c_{11}=\cdots=c_{\ell n_\ell}=0$, was zu zeigen war.

Definition 46: Seien V und W Vektorräume über K.
Eine Funktion $f:V\to W$ heißt *K-linear*, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

(1) Für alle $v,w\in V$ ist $f(v+w)=f(v)+f(w)$.
(„Das Bild der Summe ist die Summe der Bilder.“)
(2) Für alle $c\in K$ und für alle $v\in V$ ist $f(cv)=cf(v)$.
(„Das Bild des c-fachen ist das c-fache des Bildes.“)

Beispiel 47: Ein Kaufhaus bietet n Waren an. Kauft jemand a_i Einheiten der i-ten Ware, $1\le i\le n$, so muss er $p(a_1,\dots,a_n)$ Euro zahlen. Die Funktion

$$p:\mathbb{Q}^n\longrightarrow\mathbb{Q}\,,\ (a_1,\dots,a_n)\longmapsto p(a_1,\dots,a_n)$$

ist genau dann linear, wenn es keinen Mengenrabatt, keine Sonderaktionen („nimm drei, zahl’ zwei“) oder ähnliches gibt, also:

(1) Nimmt man bei einem Einkauf a_i und bei einem anderen Einkauf b_i Einheiten der i-ten Ware, $1\le i\le n$, dann bezahlt man in Summe dasselbe, wie wenn man alles bei einem Einkauf genommen hätte ($p(a_1,\dots,a_n)+p(b_1,\dots,b_n)=p(a_1+b_1,\dots,a_n+b_n)$).
(2) Kauft man von jeder Ware das c-fache, dann muss man c-mal soviel zahlen ($p(ca_1,\dots,ca_n)=c\cdot p(a_1,\dots,a_n)$).

Beispiel 48: V sei ein Untervektorraum des K-Vektorraums $\mathcal{F}(K,K)$ aller Funktionen von K nach K und $t_0,\dots,t_n$ seien paarweise verschiedene Elemente von K. Dann ist die „Auswertungsfunktion“

$$a:V\longrightarrow K^{n+1},\,f\longmapsto(f(t_0),f(t_1),\dots,f(t_n)),$$

linear.

Beispiel 49 : Für jede Matrix $A \in K^{m\times n}$ ist die Funktion

$$K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}\,, x \mapsto Ax\,,$$

K-linear. Später werden wir sehen, dass jede lineare Funktion vom Vektorraum aller m-Spalten in den Vektorraum aller n-Spalten durch Multiplikation mit einer Matrix gegeben ist.

Satz 50 : *Es seien V und W Vektorräume über K und $(v_i)_{i\in I}$ eine (beliebige) Basis von V.*

Eine Funktion $f : V \to W$ ist genau dann linear, wenn der Graph von f ein Untervektorraum des Produktraums $V \times W$ ist.

In diesem Fall hat der Graph von f die Basis $((v_i, f(v_i)))_{i\in I}$. Insbesondere gilt

$$\dim_K(\mathrm{Graph}(f)) = \dim_K(V)\,.$$

Beweis: Nach Definition ist $\mathrm{Graph}(f) = \{(v, f(v)) \mid v \in V\} \subset V \times W$. Seien $u, w \in V$ und $c \in K$. Wenn f linear ist, dann ist
$0_{V\times W} = (0_V, 0_W) = (0_V, f(0_V)) \in \mathrm{Graph}(f)$,
$(u, f(u)) + (w, f(w)) = (u+w, f(u)+f(w)) = (u+w, f(u+w)) \in \mathrm{Graph}(f)$
und
$c(w, f(w)) = (cw, cf(w)) = (cw, f(cw)) \in \mathrm{Graph}(f)$,
also $\mathrm{Graph}(f)$ ein Untervektorraum von $V \times W$. Wenn umgekehrt $\mathrm{Graph}(f)$ ein Untervektorraum von $V \times W$ ist, dann sind
$(u, f(u)) + (w, f(w)) = (u+w, f(u)+f(w)) \in \mathrm{Graph}(f)$ und
$c(w, f(w)) = (cw, cf(w)) \in \mathrm{Graph}(f)$, somit
$f(u+w) = f(u) + f(w)$ und $f(cw) = cf(w)$, also f linear.
Wenn f linear ist, dann ist auch die Funktion

$$F : V \to \mathrm{Graph}(f)\,, x \mapsto (x, f(x))\,,$$

linear und hat die Umkehrfunktion $\mathrm{Graph}(f) \to V$, $(x, f(x)) \mapsto x$. Daher ist F ein Isomorphismus und $(F(v_i))_{i\in I}$ eine Basis von $\mathrm{Graph}(f)$.

Beispiel 51 : Es sei k eine reelle Zahl und f die lineare Funktion
$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto kz$. Dann ist

$$\mathrm{Graph(f)} = \{(z, kz) | z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, k) | z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1, k) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

die Gerade durch $(0, 0)$ und $(1, k)$.

Beispiel 52 : Es seien a, b reelle Zahlen und g die lineare Funktion
$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto ax + by$. Dann ist

$$\mathrm{Graph(g)} = \{(x, y, ax+by) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x\cdot(1, 0, a) + y\cdot(0, 1, b) \mid x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathbb{R}(1, 0, a) + \mathbb{R}(0, 1, b) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

die Ebene durch $(0,0,0)$, $(1,0,a)$ und $(0,1,b)$.

§2. Bild und Kern einer linearen Funktion

In diesem Abschnitt seien V und W Vektorräume über K und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Funktion.

Definition 53 : Die Menge
$$\mathrm{Bild}(f) := \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$
heißt *Bild* von f und die Menge
$$\mathrm{Kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subseteq V$$
heißt *Kern* von f.

Satz 54 : Bild(f) *ist ein Untervektorraum von W,* Kern(f) *ist ein Untervektorraum von V.*
Die Dimension des Bildes von f heißt Rang von f *(Schreibweise* rg(f)*).*

Beweis: Da f linear ist, ist $0_V \in \mathrm{Kern}(f)$. Für $u, v \in \mathrm{Kern}(f)$ und $c \in K$ folgt aus $f(u+v) = f(u) + f(v) = 0_W$ auch $u + v \in \mathrm{Kern}(f)$, sowie aus $f(cu) = cf(u) = 0_W$ auch $cu \in \mathrm{Kern}(f)$. Daher ist $\mathrm{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von V. Analog zeigt man, dass $\mathrm{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von W ist.

Satz 55 : *Sei $A \in K^{m\times n}$ und $L(A,0) := \{x \in K^{n\times 1} | Ax = 0\}$ der Lösungsraum des durch A definierten Systems homogener linearer Gleichungen. Fasst man die Matrix A als lineare Funktion*
$$A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}, x \mapsto Ax,$$
auf, dann ist $\mathrm{Kern}(A) = L(A,0)$ *und* $\mathrm{Bild}(A) = {}_K\langle A_{-1}, \dots, A_{-n}\rangle$.

Beweis: Es ist $\mathrm{Kern}(A) = \{x \in K^{n\times 1} \mid Ax = 0\} = L(A,0)$ und $\mathrm{Bild}(A) =$
$= \{Ax | x \in K^{n\times 1}\} = \{\sum_{i=1}^{n} x_i A_{-i} | x_1, \dots x_n \in K\} = {}_K\langle A_{-1}, \dots, A_{-n}\rangle$.

Satz 56 : *Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K, $f : V \to W$ eine K-lineare Funktion und $r :=$ rg(f). Dann gibt es eine Basis $(v_1, \dots, v_n)$ von V so, dass*

(1) $(f(v_1), \dots, f(v_r))$ *eine Basis von* Bild(f) *und*
(2) $(v_{r+1}, \dots, v_n)$ *eine Basis von* Kern(f)

ist. Insbesondere gilt
$$\dim_K(V) = \dim_K(\mathrm{Bild}(f)) + \dim_K(\mathrm{Kern}(f)).$$

Ergänzt man die Basis $(f(v_1),\dots,f(v_r))$ *von* $\mathrm{Bild}(f)$ *zu einer Basis* $(w_1,\dots,w_m)$ *von* W*, dann ist*

$$D_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \\ \vdots & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$$

(nur an den Stellen $(1,1),\dots,(r,r)$ *stehen Einsen und sonst Nullen) die Matrix von* f *bezüglich der Basen* $(v_1,\dots,v_n)$ *und* $(w_1,\dots,w_m)$*.*

Beweis: Sei $(w_1,\dots,w_r)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Dann kann man Urbilder $v_1,\dots,v_r\in V$ von $w_1,\dots,w_r$ unter f wählen. Sei $(u_1,\dots,u_s)$ eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$. Dann ist

$$(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s)$$

ein Erzeugendensystem von V, weil für $y\in V$ aus

$$f(y)=\sum_{i=1}^r a_iw_i=\sum_{i=1}^r a_if(v_i)=f(\sum_{i=1}^r a_iv_i)$$

folgt, dass $z:=y-\sum_{i=1}^r a_iv_i\in\mathrm{Kern}(f)$ ist. Daher ist $y=z+\sum_{i=1}^r a_iv_i$ eine Linearkombination von $(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s)$.

Wir zeigen noch, dass $(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s)$ linear unabhängig ist. Seien dazu $c_1,\dots,c_r,d_1,\dots,d_s\in K$ mit

$$\sum_{i=1}^r c_iv_i+\sum_{j=1}^s d_ju_j=0\,.$$

Dann ist $0=f(\sum_{i=1}^r c_iv_i+\sum_{j=1}^s d_ju_j)=\sum_{i=1}^r c_if(v_i)=\sum_{i=1}^r c_iw_i$.
Da $(w_1,\dots,w_r)$ linear unabhängig ist, sind alle c_i gleich 0. Dann ist $\sum_{j=1}^s d_ju_j=0$, und aus der linearen Unabhängigkeit von $u_1,\dots,u_s$ folgt $d_1=\dots=d_s=0$. Also ist $(v_1,\dots,v_r,u_1,\dots,u_s)$ die gesuchte Basis von V. Insbesondere ist $r+s=n$.

§3. Systeme linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form

Definition 57 : Ein *System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form* ist eine Aufgabe:

- Gegeben sind eine lineare Funktion $f:V\to W$ und ein Vektor $y\in W$.
- Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ der Menge

  $$L(f,y):=f^{-1}(\{y\})=\{x\in V\mid f(x)=y\}$$

  aller Vektoren $x\in V$, für die $f(x)=y$ ist.

Die Menge $L(f,y)$ heißt *Lösungsmenge* des durch f und y gegebenen Systems linearer Gleichungen. Ihre Elemente heißen *Lösungen* dieses Systems.

Das durch f und y gegebene System linearer Gleichungen heißt *homogen*, wenn $y = 0_W$ ist, ansonsten *inhomogen*. Die Lösungsmenge eines homogenen Systems linearer Gleichungen ist

$$L(f,0) = \mathrm{Kern}(f)\,.$$

Satz 58: *Sei $f : V \to W$ K-linear, $y \in W$ und $z \in L(f,y)$ (also ist $L(f,y)$ insbesondere nicht leer). Dann ist*

$$L(f,y) = z + \mathrm{Kern}(f)$$

ein affiner Unterraum von V mit Aufpunkt z und parallelem Untervektorraum $\mathrm{Kern}(f)$.
Das durch f und y gegebene System „lösen" bedeutet daher: finde (irgend)ein Urbild z von y unter f und (irgend)eine Basis von $\mathrm{Kern}(f)$.
Falls V endlichdimensional ist, gilt weiters

$$\dim_K(L(f,y)) = \dim_K(V) - \mathrm{rg}(f)\,.$$

Beweis: Sei $v \in \mathrm{Kern}(f)$. Dann ist $f(z+v) = f(z) + f(v) = y + 0 = y$, also $z + v \in L(f,y)$.

Sei $x \in L(f,y)$. Dann ist $f(x-z) = f(x) - f(z) = y - y = 0$, also $x - z \in \mathrm{Kern}(f)$ und $x = z + (x-z) \in \{z + v \mid v \in \mathrm{Kern}(f)\}$.
Nach Satz 56 ist $\dim_K(\mathrm{Kern}(f)) = \dim_K(V) - \mathrm{rg}(f)$.

Beispiel 59: Fasst man eine Matrix $A \in K^{m\times n}$ als eine lineare Funktion

$$f : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}\,,\, x \mapsto Ax\,,$$

auf, dann ist $L(f,y) = L(A,y)$.

Beispiel 60: Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$,
$\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\}$ und

$$D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})\,,\, f \mapsto f'\,,$$

wobei f' die Ableitung der Funktion f bezeichnet. Dann sind $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ und $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation Vektorräume über $\mathbb{R}$, und die Funktion D ist $\mathbb{R}$-linear. Der Unterraum $\mathrm{Kern}(D)$ besteht aus allen konstanten Funktionen. Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ heißt *Stammfunktion* von $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, wenn $Df = g$ ist. Die Menge aller Stammfunktionen von g ist

$$L(D,g) = f + \mathrm{Kern}(D).$$

Satz 61 : *Seien V,W Vektorräume über K der Dimensionen n,m mit Basen $\underline{v}, \underline{w}$, sei $f : V \to W$ K-linear mit Matrix*

$$A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m\times n}$$

und $y = \underline{w}b \in W$. Dann bildet der Koordinaten-Isomorphismus

$$V \to K^{n\times 1}\,,\ \underline{v}c \mapsto c\,,$$

$L(f,y)$ auf $L(A,b)$ ab und Kern(f) *auf $L(A,0)$.*

Beweis: Es ist $\underline{v}c \in L(f,y)$ genau dann wenn $\underline{w}(Ac) = \underline{w}b$, also $c \in L(A,b)$ ist.

Nach Satz 61 kann für $f : V \to W$ und $y \in W$ das System linearer Gleichungen (f,y) wie folgt gelöst werden:

(1) Wähle Basen $\underline{v}, \underline{w}$ von V,W.
(2) Berechne die Matrix $A := M(f, \underline{v}, \underline{w})$ und die Koordinatenspalte b von y bezüglich $\underline{w}$.
(3) Berechne die Lösungsmenge $L(A,b)$.
Wenn $L(A,b)$ leer ist, dann ist auch $L(f,y)$ leer.
Wenn $z \in L(A,b)$ und $(u_1,\ldots,u_s)$ eine Basis von $L(A,0)$ ist, dann ist $\underline{v}z \in L(f,y)$ und $(\underline{v}u_1,\ldots,\underline{v}u_s)$ eine Basis von Kern(f).

Im Schulunterricht entsprechen Systeme linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form gewissen „Textaufgaben“, und die Umwandlung in die Form $Ax = b$ nennt man „den Ansatz finden“.

Beispiel 62 : Wir suchen alle Polynomfunktionen $p \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$p(-1) = 2, p(1) = 1, p(2) = 1 \ \text{ und } \ \mathrm{gr}(p) < 5\,.$$

Sei $V := \{q \in \mathbb{R}[x] \mid \mathrm{gr}(q) < 5\}$, $W := \mathbb{R}^3$,

$$f : V \longrightarrow W\,,\ q \longmapsto (q(-1), q(1), q(2))\,,$$

und $y := (2,1,1) \in W$. Die Funktion f ist linear.
Wir wählen die Basis $\underline{v} := (1,x,x^2,x^3,x^4)$ von V und die Standardbasis $\underline{w} := (e_1,e_2,e_3)$ von $W = \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$A := M(f,\underline{v},\underline{w}) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\,.$$

Man berechnet mit dem Gauß-Verfahren

$$L(A,b) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\,.$$

Daher ist

$$L(f,y) = \{\frac{4}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \\ +c(-2+x+2x^2-x^3) + d(-4+5x^2-x^4) \,|\, c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

Satz 63: *Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und Z ein affiner Unterraum von V. Dann ist Z die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen, d.h. es gibt eine lineare Funktion*
$f : V \to W$ und einen Vektor $y \in W$ mit

$$Z = L(f,y)\,.$$

(Dann ist Z durch f und y „in impliziter Form“ *gegeben).*
Wenn der affine Unterraum Z durch einen Aufpunkt p und eine Basis $(u_1,\ldots,u_k)$ des parallelen Untervektorraums gegeben ist, dann kann ein solches System linearer Gleichungen auf die folgende Weise berechnet werden:

Ergänze $(u_1,\ldots,u_k)$ zu einer Basis $(u_1,\ldots,u_k,u_{k+1},\ldots,u_n)$ von V. Setze

$$f : V \longrightarrow K^{n-k}\ ,\ \sum_{i=1}^{n} c_i u_i \longmapsto (c_{k+1}, c_{k+2}, \ldots, c_n)$$

und $y := f(p)$.

Beweis: Seien f und y wie im Satz definiert. Dann ist $\mathrm{Kern}(f) = \\ =_K\!< u_1,\ldots,u_k >$ und $p \in L(f,y)$. Nach Satz 58 ist $Z = L(f,y)$.