Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2
WS 2014/15

Blatt 4, 27. Oktober 2014

1) Es seien m und n positive ganze Zahlen. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}(3k+1)(2\ell-1) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}(4k-\ell+2).$$

Zeigen Sie: Für $a_0, a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{Q}$ ist

$$\sum_{k=1}^{m}(a_k - a_{k-1}) = a_m - a_0.$$

2) Was ist eine *Matrix*? Beschreiben Sie die folgenden Situationen jeweils durch eine Matrix:

- Für die Herstellung der Produkte A, B, C, D stehen zwei Maschinen X, Y zur Verfügung. Die Maschine X braucht 7 bzw. 6 bzw. 5 bzw. 8 Sekunden für die Produktion von A bzw. B bzw. C bzw. D; die Maschine Y braucht dafür 5 bzw. 7 bzw. 6 bzw. 7 Sekunden.
  Welche Rechenoperation muss man mit der gesuchten Matrix ausführen, um die gleiche Situation zu beschreiben, wenn aber die Produktionszeiten in Minuten angegeben werden?
- Es seien a, b, c, d, e Orte, a ist von b 8 km entfernt, d ist von b 11 km entfernt, a ist von c 12 km entfernt, c ist von e 7 km entfernt, c ist von b 8 km entfernt, a ist von e 10 km entfernt, c ist von d 11 km entfernt, d ist von e 7 km entfernt, a ist von d 13 km entfernt, e ist von b 10 km entfernt.
  Welche Rechenoperation muss man mit der gesuchten Matrix ausführen, um die gleiche Situation zu beschreiben, wenn aber die Entfernungen in Englischen Landmeilen (1 mile = 1, 609344 km) angegeben werden?

3) Wie ist die *Addition von Matrizen* definiert? Wie multipliziert man eine rationale Zahl mit einer rationalen Matrix? Berechnen Sie die rationalen Matrizen

$$\frac{-21}{14}A + \frac{33}{55}B \quad \text{und} \quad \frac{2}{3}A - \frac{3}{11}B\,,$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -\frac{48}{36} & -\frac{67}{19} & -5 \end{pmatrix}$$

ist.

4) Wie ist *das Produkt von zwei Matrizen* definiert? Bilden Sie alle möglichen Produkte von je zwei der folgenden rationalen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & 1 & \frac{-2}{5} & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ \frac{5}{6} & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \frac{7}{3} & -2 & -2 \\ \frac{3}{5} & 2 & 5 & \frac{48}{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5) Was ist eine *Elementarmatrix*? Was sind *elementare Zeilenumformungen*? Beschreiben Sie den Zusammenhang von elementaren Zeilenumformungen und Elementarmatrizen.
Berechnen Sie Elementarmatrizen $P, Q, R \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass für alle Matrizen $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ die Matrix PA bzw. QA bzw. AR jene Matrix ist, die man aus A durch

- Subtraktion der 5-fachen vierten Zeile von A von der ersten Zeile von A erhält bzw.
- Multiplikation der dritten Zeile von A mit $\frac{2}{9}$ erhält bzw.
- Vertauschung der zweiten und fünften Spalte von A

erhält.

6) Wann ist eine Matrix *invertierbar*? Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A die zu C und B die zu D inverse Matrix ist. Berechnen Sie dann die zu $A \cdot B$ und $B \cdot A$ inversen Matrizen.