Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2
WS 2014/15

Blatt 3, 20. Oktober 2014

1) Was bedeutet es, eine Behauptung *durch Induktion zu beweisen*? Beweisen Sie durch Induktion:
   a) Für jede positive ganze Zahl n ist $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.
   b) Für $n \geq 3$ ist $2n^2 > (n+1)^2$.

2) Was versteht man unter der *Zifferndarstellung* einer natürlichen Zahl?
Stellen Sie die Anzahl der Sekunden in einer Stunde durch Ziffern zur Basis zwei, zur Basis 8, zur Basis zehn und zur Basis sechzig dar.

Wie kann man zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung der Größe nach vergleichen? Ordnen Sie die folgenden mit 8 bits dargestellten natürlichen Zahlen der Größe nach an:

$$11011111, 01010101, 11000011, 01011011,$$

$$00111111, 01011101, 11010111, 01000000 \ .$$

3) Es seien b eine positive ganze Zahl mit $b \geq 2$ und $z_n, \ldots, z_{-p}$ natürliche Zahlen, die alle kleiner als b sind. Was bedeutet dann $z_n z_{n-1} \ldots z_0.z_{-1} \ldots z_{-p}$?
Es seien b, c, d, p positive ganze Zahlen mit $b \geq 2$. Wie berechnet man natürliche Zahlen $z_n, \ldots, z_{-p}$ mit $0 \leq z_n, \ldots, z_{-p} < b$ so, dass

$$0 \leq \frac{c}{d} - z_n z_{n-1} \ldots z_0.z_{-1} \ldots z_{-p} < b^{-p}$$

ist? Führen Sie das für $b =$ zwei, $c =$ siebzehn, $d =$ sechs, und $p =$ vier aus. Ebenso für $b =$ zehn, $c =$ dreiundzwanzig, $d =$ achtundzwanzig und $p =$ vier.

4) Was ist ein *kommutativer Ring*, was ist ein *Körper*? Beweisen Sie: Wenn a und b Elemente eines kommutativen Rings sind, dann ist

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Zeigen Sie durch Induktion über n: Wenn a und b Elemente eines kommutativen Rings sind und n eine positive natürliche Zahl, dann ist

$$a^n - b^n = (a-b) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i.$$

5) Was ist eine *bijektive Funktion*? Es sei I eine endliche Menge und $(c_\ell)_{\ell \in I}$ eine Familie von Elementen eines kommutativen Ringes. Was bedeuten

$$\sum_{\ell \in I} c_\ell \text{ und } \prod_{\ell \in I} c_\ell\,?$$

Es sei $M := \{-3, 1, 2, -1\}$. Stellen Sie mit Hilfe von $\sum$ und $\prod$ die Zahlen dar, die man wie folgt erhält:

a) Jedes Element von M wird quadriert, dann mit zwei multipliziert und dazu eins addiert. Dann werden diese Zahlen zusammengezählt.

b) Zu jedem Element in M wird 2 addiert, jede dieser (neuen) Zahlen wird durch zwei dividiert. Schließlich wird von diesen Zahlen das Produkt gebildet.

Berechnen Sie diese zwei Zahlen und beschreiben Sie genau, was Sie dabei tun!

6) Sei $I := \{3, 2, -2, 1\}$. Die Funktionen f und g von I nach $\mathbb{Q}$ sind durch

$$f(j) := 2j^2 - 1, \ g(j) := j^2 + 1, \ (\text{für alle } j \in I),$$

definiert.
Berechnen Sie $\sum_{i \in I} f(i)$, $\prod_{i \in I} f(i)$, $\sum_{i \in I} g(i)$ und $\prod_{i \in I} g(i)$.