Lineare Algebra 1
PS1 bzw. PS2
WS 2014/15

Blatt 8, 24. November 2014

1) Wie kann man nach Wahl eines Nullpunktes die Zeichenebene in natürlicher Weise als Vektorraum betrachten? Erläutern Sie dazu, wie die Summe von zwei Punkten und das Produkt eines Punktes mit einer reellen Zahl definiert sind.
Sei E dieser Vektorraum. Was ist eine Gerade in diesem Vektorraum? Wählen Sie drei Punkte A, B, C so, dass je zwei von ihnen eine Basis bilden und zeichnen Sie $(A+B)+C$, $A+(B+C)$, $2A$ und $A-B$!

2) Was ist ein *affiner Unterraum* eines Vektorraums? Was ist eine *Gerade*, was ist eine *Ebene* in einem Vektorraum?
Es sei G die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(2,-2)$, die zur Geraden durch $(0,0)$ und $(1,3)$ parallel ist. Es sei H die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(3,0)$, die zur Geraden durch $(0,0)$ und $(\frac{3}{4},-1)$ parallel ist. Berechnen Sie den Durchschnitt von G und H.
Geben Sie zwei Ebenen im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ an, deren Durchschnitt $\{(0,0,0,0)\}$ ist.

3) G sei eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ und E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Der Durchschnitt $G \cap E$ kann leer, ein Punkt oder die Gerade G sein. Erläutern Sie, wie man $G \cap E$ berechnet, wenn
(a) G und E in impliziter Form
(b) G und E in Parameterform
(c) G in Parameterform und E in impliziter Form
(d) G in impliziter Form und E in Parameterform
gegeben sind.

4) Was ist ein *Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum*? Was ist ein *euklidischer Raum*? Wie ist der *Abstand zwischen zwei Vektoren* in einem Vektorraum mit Skalarprodukt definiert? Wann sind zwei Vektoren *zueinander orthogonal* ?
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie alle Abstände zwischen je zwei der folgenden Vektoren und stellen Sie fest, welche dieser Vektoren zueinander orthogonal sind:

$$(3,2,-1),\ (0,1,2),\ (1,1,5),\ (5,-4,2)\,.$$

5) Gibt es ein Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ auf $\mathbb{R}^3$ so, dass dessen Gram'sche Matrix bezüglich der Standardbasis gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist? Wenn ja, lösen Sie Aufgabe 4 mit diesem neuen Skalarprodukt (anstatt mit dem Standardskalarprodukt).

6) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und A, B, C drei verschiedene Punkte in V, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Zwei Geraden $P + \mathbb{R}S$ und $Q + \mathbb{R}T$ *sind zueinander orthogonal* oder *stehen zueinander normal*, wenn S und T zueinander orthogonal sind.
Mit a bzw. b bzw. c bezeichnen wir die Gerade durch A bzw. B bzw. C, die normal zur Geraden durch die anderen zwei Punkte steht.
Zeigen Sie: $a \cap b \cap c$ enthält genau einen Punkt.
(„Die Höhenlinien eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkt").
Hinweis: Sie können annehmen, dass $A = 0$ ist und (B, C) eine Basis von V ist.