Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2
WS 2014/15

Blatt 7, 17. November 2014

1) Ein Metallgitter der Form

$$\begin{array}{ccccccccc} & & C & \text{---} & D & \text{---} & E & \text{---} & F \\ & & \Big| & & \Big| & & & & \\ G & \text{---} & A & \text{---} & B & & & & \end{array}$$

wurde erhitzt. Für die Gitterpunkte A, B, C, D, E soll gelten: Die Temperatur (in Celsiusgraden gemessen) in einem Gitterpunkt ist der Mittelwert der Temperaturen der benachbarten Gitterpunkte (also die Summe der Temperaturen geteilt durch die Anzahl der benachbarten Gitterpunkte). Berechne die Temperaturen in A, B, C, D, E unter der Annahme, dass die Temperaturen in F und G bekannt sind. Kann zu jeder Temperatur in F die Temperatur in G so gewählt werden, dass die Temperatur in C Null ist?

2) Was ist eine *Basis* eines Vektorraums? Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis?
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und } v := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ bilden und berechnen Sie die Koordinatenspalten von u und v bezüglich dieser Basis.

3) Was ist die *Dimension* eines Vektorraums? Was ist der *Rang* einer Matrix? Wie berechnet man damit die Dimension des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Systems linearer Gleichungen? Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Dimension des Lösungsraums des durch diese Matrix gegebenen homogenen Systems linearer Gleichungen. Berechnen Sie eine Basis dieses Lösungsraums. Berechnen Sie eine Basis des Spaltenraums dieser Matrix und schreiben Sie die letzte Spalte der Matrix als Linearkombination dieser Basisvektoren an.

4) Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis?
Zeigen Sie, dass $((3,2),(-3,1))$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$ ist. Berechnen Sie die Koordinatenspalten von $(1,1)$, $(1,3)$, und von $(2,3)$ bezüglich dieser Basis.
Zeigen Sie, dass

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

eine Basis des Untervektorraums $\{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A_{11}+A_{22}=0\}$ von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist. Berechnen Sie die Koordinatenspalten der Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{5} & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

5) Verwenden Sie Satz 104 zur Beantwortung der folgenden Fragen:
Welche der folgenden k-Tupel ($k = 5$, 4 oder 2) sind linear unabhängig, welche sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^2$ bzw. $\mathbb{Q}^3$?
Wählen Sie aus allen k-Tupeln eine Basis des davon erzeugten Vektorraums aus und ergänzen Sie diese durch Standard-Zeilen zu einer Basis des Vektorraums aller Zahlenpaare bzw. -tripel!

$$((0,0),(2,2),(-3,-3),(1,1),(2,3)),$$
$$((3,2,1),(1,1,2),(0,0,0),(-4,-3,-3),(1,1,1)),$$
$$((3,2,-1),(3,1,4),(1,4,-1),(3,1,4)),$$
$$((1,4),(0,0),(-2,-8),(2,8)),$$
$$((2,1,1),(1,1,1)).$$

6) Wie berechnet man die zu einer quadratischen Matrix *inverse* Matrix? Warum ist jede invertierbare Matrix ein Produkt von Elementarmatrizen? Berechnen Sie die zu

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

inverse Matrix und stellen Sie diese als Produkt von Elementarmatrizen dar.