Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2
WS 2014/15

Blatt 5, 3. November 2014

1) Was ist ein *System linearer Gleichungen*? Was ist die *Lösungsmenge* eines solchen Systems und welche Eigenschaften hat diese?

   Zeigen Sie, dass die folgende Aufgabe als System linearer Gleichungen aufgefasst werden kann (Durch welche Matrix und welche Spalte ist dieses System linearer Gleichungen gegeben? Was ist gesucht? Sie brauchen das System aber nicht zu lösen.): Von einer Funktion $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$ sind die Bilder von $-3, -1$ und 2 bekannt: $f(-3) = 2$, $f(-1) = 4$ und $f(2) = 0$. Wir nehmen an, dass die Funktion f die folgende Eigenschaft hat: Es gibt rationale Zahlen a, b, c so, dass für alle rationalen Zahlen z das Bild $f(z)$ von z bezüglich f gleich $az^2 + bz + c$ ist. Gesucht sind alle solchen Tripel (a, b, c). („Quadratische Interpolation").

2) Es seien $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \\ d' \end{pmatrix}$ rationale Spalten mit den Eigenschaften

$$3a + b - 2c - 4d = 0,\ 2a - b + 3d = 0$$

   und

$$3a' + b' - 2c' - 4d' = 0,\ 2a' - b' + 3d' = 0\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Summe dieser zwei Spalten und alle rationalen Vielfachen jeder dieser Spalten dieselben Eigenschaften haben.

3) Was ist ein *Vektorraum*? Was ist ein *Untervektorraum* eines Vektorraums? Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{Q}^{3\times3}$ (über $\mathbb{Q}$) aller rationalen 3×3-Matrizen?

$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times3} \mid A \text{ invertierbar }\}\ ,$$
$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times3} \mid A_{12} - A_{22} + A_{31} - A_{21} = 0\}\ ,$$
$$\{A \in \mathbb{Q}^{3\times3} \mid A_{11} + A_{22} + A_{33} = 1\}\ ,$$
$$\{E_{13} + 4aE_{21} - 3bE_{31} \in \mathbb{Q}^{3\times3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}\ ,$$

$$\{sE_{12} - tE_{31} + 2uE_{33} \in \mathbb{Q}^{3\times 3} \mid s,t,u \in \mathbb{Q}\}\ .$$

(Die Matrizen E_{ij} sind Standardmatrizen).

4) Was ist eine *Linearkombination* von Vektoren? Schreiben Sie die Linearkombination

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}4\\2\\-1\\1\end{pmatrix} + \frac{7}{3}\begin{pmatrix}2\\2\\3\\1\end{pmatrix}$$

als Produkt einer Matrix mit einer Spalte. Schreiben Sie das Produkt

$$\begin{pmatrix}0.12 & 3.45\\6.78 & 9.01\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4.50\\2.31\end{pmatrix}$$

einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der zwei Spalten der Matrix an.

Es seien n eine positive ganze Zahl, $e_1,\dots,e_n$ die Standard-Spalten in $\mathbb{Q}^{n\times 1}$ und A eine rationale $n\times n$-Matrix. Zeigen Sie: Es gibt genau dann eine rationale $n\times n$-Matrix B mit $A\cdot B = I_n$, wenn jede der Standard-Spalten $e_1,\dots,e_n$ eine Linearkombination der Spalten $A_{-1},\dots,A_{-n}$ ist.

5) Was ist ein *Erzeugendensystem eines Vektorraums*? Was ist ein *linear unabhängiges* n-Tupel von Vektoren? Entscheiden Sie, welche der folgenden n-Tupel ($n = 2,3$ oder 4) von Paaren oder Tripeln rationaler Zahlen linear unabhängig sind und welche Erzeugendensysteme des Vektorraums $\mathbb{Q}^2$ bzw. $\mathbb{Q}^3$ (über $\mathbb{Q}$) sind ? Begründen Sie Ihre Entscheidung.

$$((1,0),(2,1),(0,1)),\quad ((2,-1),(11,0)),$$
$$((1,1,0),(0,1,1),(0,0,0)),\quad ((1,1,-2),(0,1,0),(3,6,-6)),$$
$$((-2,-4),(0,0),(-4,-8),(3,6)),$$
$$((1,0,0),(0,1,2)),\quad ((1,0,0),(0,3,1),(0,1,0)).$$

6) Was ist eine *Basis* eines Vektorraums? Zeigen Sie, dass die Menge

$$\{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A_{11} + A_{22} = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist. Bestimmen Sie drei verschiedene Basen dieses Untervektorraums. Schreiben Sie die Matrix $\begin{pmatrix}2 & 0\\1 & -2\end{pmatrix}$ als Linearkombination jeder dieser drei Basen.