Lineare Algebra 1
PS2
WS 2014/15

Blatt 14, 2. Februar 2015

1) Was ist eine *Orientierung* eines reellen Vektorraums? Was ist ein *orientierter Vektorraum*? Was ist das *Vektorprodukt* zweier Vektoren in einem dreidimensionalen euklidischen orientierten Raum?
Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei durch die Standardbasis orientiert. Ergänzen Sie $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,1))$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Vektorprodukte
$$v := (2,0,1) \times (-1,2,-1)\,, \quad v \times (2,1,1)\,,$$
und
$$(2,0,1) \times ((-1,2,-1) \times (2,1,1)).$$

2) Was ist ein *Parallelotop*, was ist ein *Parallelogramm*? Wie ist das *Volumen eines Parallelotops* definiert? Zeigen Sie: Wenn n Vektoren in einem n-dimensionalen euklidischen Raum ganzzahlige (bzw. rationale) Koordinaten bezüglich einer ON-Basis haben, dann ist das Volumen des von ihnen erzeugten Parallelotops eine ganze (bzw. rationale) Zahl.
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum. Wählen Sie einen Punkt (a,b) so, dass
$$(1,3), (-1,1), (2,-1), (a,b)$$
die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Wieviele Möglichkeiten gibt es dazu? Berechnen Sie die Fläche dieser Parallelogramme. Wählen Sie dazu das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

3) Berechnen Sie im Vektorraum $\mathbb{R}^4$ mit Standardskalarprodukt das Volumen des von
$$((1,3,2,2),\ (2,1,0,-1),\ (1,2,-2,1),\ (2,-2,2,1))$$
erzeugten Parallelotops und die Fläche des von $((2,-2,1,3)$ und $(2,1,-1,0)$ erzeugten Parallelogramms.

4) Es seien $v := (2, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ und $w := (1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der Standardbasis als orientierten euklidischen Raum. Berechnen Sie $v \times w$, die Fläche des von v und w erzeugten Parallelogramms, den Abstand von $(1, 2, 3)$ zur Ebene, welche die Punkte 0, v und w enthält, und den Sinus des Winkels zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0} v$ und $\mathbb{R}_{\geq 0} w$.

5) Berechnen Sie die Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und die entsprechenden Eigenräume ($\leq \mathbb{C}^{2\times 1}$) der Matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} .$$

6) Was ist eine *lineare Funktion*? Welche der folgenden Funktionen sind linear?

$$f : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2 \, , a \mapsto a^3 + a^2 + a \, ,$$
$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; z \mapsto (-2z + 1)^2 - 4z^2 - 1 \, ,$$
$$h : \mathbb{Q}^{n\times n} \to \mathbb{Q} \, , A \mapsto \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} A_{ij} \, ,$$
$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; z \mapsto 2z + 3 \, ,$$
$$k : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2 \, , (a, b) \mapsto (3a - b + 1, 2a + 4b) \, .$$
$$\ell : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2 \, , (m, n) \mapsto (m + n, m - 2n) \, .$$