

# Lineare Algebra 1

## PS1

WS 2014/15

### Blatt 13, 26. Jänner 2015

- 1) Was ist eine *komplexe Zahl*? Wie sind *Addition* und *Multiplikation* von komplexen Zahlen definiert? Berechnen Sie reelle Zahlen  $a, b, c, d$  so, dass

$$\left(3 - \frac{2}{5}i\right)^{-1} = a + bi$$

und

$$\left(\frac{1}{3} - 2i\right)\left(2 - \frac{1}{4}i\right) = c + di$$

ist. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil aller komplexen Zahlen  $z$  mit der Eigenschaft  $z^2 = -3 - 4i$ .

- 2) Berechnen Sie die Eigenwerte in  $\mathbb{C}$  und die entsprechenden Eigenräume ( $\leq \mathbb{C}^{2 \times 1}$ ) der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

- 3) Sei  $V$  ein Vektorraum. Was ist eine *Translation* in  $V$ ? Wie sind die Addition und die Skalarmultiplikation im Vektorraum aller Translationen von  $V$  definiert? Was ist ein *Pfeil* in  $V$ ?

Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und wählen Sie eine Basis  $(P, Q)$  dieses Vektorraums.

Die Translationen  $s$  und  $t$  sind durch  $s(Q) = Q + P$  und  $t(Q) = P$  definiert. Skizzieren Sie die Graphen von  $s$ ,  $t$  und  $s \circ t$ , indem Sie einige Elemente dieser Graphen in die Ebene zeichnen.

Bilden die Translationen  $s$  und  $t$  eine Basis des Vektorraums aller Translationen der Ebene? Wenn ja, berechnen Sie die Koordinatenspalte der Translation  $r$ , die durch  $r(0) = Q$  definiert ist, bezüglich dieser Basis.

- 4) Wie sind die *punktweise Addition* und die *punktweise Multiplikation* von Funktionen mit Bildbereich  $\mathbb{R}$  definiert? Welche Rechenregeln gelten für diese Rechenoperationen?

Die Funktionen  $f, g, h$  von  $\mathbb{R}$  nach  $\mathbb{R}$  seien durch

$$f(r) := 2|r| + 2r, \quad g(r) := r - |r|, \quad h(r) := 8r|r|, \quad (r \in \mathbb{R}),$$

definiert. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$$(f + g)^2 = f^2 + g^2;$$

$$f^2 - 4g^2 = 2h;$$

$$(f + g)^3 = f^3 + 97f^2 \cdot g + 23f \cdot g^2 + g^3;$$

$$(f \cdot h - g)^2 = h^2 + g;$$

$$f + g \cdot h = 2h + g \cdot f.$$

- 5) Was ist eine *Polynomfunktion*? Was sind die *Koeffizienten* einer Polynomfunktion? Berechnen Sie die Koeffizienten mit Index 8 und mit Index 9 des Produktes der Polynomfunktionen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \longmapsto 3 + 2a - 4a^3 - a^6 + 5a^8$$

und

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad a \longmapsto 1 + 2a^2 - 3a^5 - 4a^7 + a^{10}.$$

- 6) Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis? Was ist die *Transformationsmatrix* von einer Basis eines Vektorraums  $V$  zu einem  $q$ -Tupel von Vektoren in  $V$ ? Wie kann man mit Hilfe dieser Transformationsmatrix entscheiden, ob dieses  $q$ -Tupel eine Basis von  $V$  ist?

Es sei  $\underline{e}$  die Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$ ,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass  $\underline{u} := \underline{e}A$  und  $\underline{w} := \underline{e}B$  Basen von  $\mathbb{R}^2$  sind. Berechnen Sie die Koordinatenspalten von  $e_1$ ,  $e_2$  und  $2e_1 + 3e_2$  bezüglich der Basen  $\underline{u}$  und  $\underline{w}$ . Berechnen Sie die Koordinatenspalte von  $u_1 + 2u_2$  bezüglich der Basis  $\underline{w}$ .