Lineare Algebra 1
PS1 bzw. PS2
WS 2014/15

Blatt 12, 19. Jänner 2015

1) Was ist ein *Eigenwert*, was ist ein *Eigenvektor* einer Matrix? Was ist der *Eigenraum* einer Matrix zum Eigenwert c? Überprüfen Sie, ob eine oder mehrere der Spalten

$$\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$

Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix}-1 & 3 & -3\\ -3 & 5 & -3\\ -6 & 6 & -4\end{pmatrix}$$

sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechenden Eigenwerte.

2) Wie kann man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix berechnen? Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix}2 & -4\\ -4 & 1\end{pmatrix}.$$

3) Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Zeigen Sie:
Genau dann ist 0 ein Eigenwert von A, wenn A nicht invertierbar ist.
Wenn A invertierbar ist und $c \in K$ ein Eigenwert von A ist, dann ist c^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} und die Eigenräume von A zum Eigenwert c und von A^{-1} zum Eigenwert c^{-1} sind gleich.
Berechnen sie die Eigenwerte und Eigenräume der zu

$$\begin{pmatrix}1 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$$

inversen Matrix.

4) Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

5) Was ist eine *Eigenbasis* einer Matrix? Berechnen Sie - wenn möglich - eine Eigenbasis der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{bzw.} \quad M := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Falls N bzw. M eine Eigenbasis hat, sei $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix, deren Spalten die zwei berechneten Eigenbasisvektoren sind. Berechnen Sie dann $S^{-1}NS$ bzw. $T^{-1}MT$. Berechnen Sie die zweihunderttausendste Potenz der Matrizen M bzw. N.

6) [nur für PS 1] Berechnen Sie reelle Zahlen k und d so, dass der Abstand zwischen $(2, 3, 3, 4)$ und $(k + d, 2k + d, 3k + d, 4k + d)$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein wird. Erläutern Sie, warum man dafür den Fußpunkt des Lotes von $(2, 3, 3, 4)$ auf der von $(1, 1, 1, 1)$ und $(1, 2, 3, 4)$ erzeugten Ebene berechnet. Warum genügt es, dazu ein System von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten zu lösen? Was bedeutet diese Aufgabe für die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto k.z + d$?

Berechnen Sie reelle Zahlen a, b und c so, dass der Abstand zwischen $(2, 3, 3, 4)$ und $(a+b+c, 4a+2b+c, 9a+3b+c, 16a+4b+c)$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein wird. Erläutern Sie, warum man dafür den Fußpunkt des Lotes von $(2, 3, 3, 4)$ auf den von $(1, 1, 1, 1)$, $(1, 2, 3, 4)$ und $(1, 4, 9, 16)$ erzeugten Untervektorraum berechnet. Warum genügt es, dazu ein System von 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten zu lösen? Was bedeutet diese Aufgabe für die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto a.z^2 + b.z + c$?

6) [nur für PS 2] Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$