Lineare Algebra 1
PS1 bzw. PS2
WS 2014/15

Blatt 11, 12. Jänner 2015

1) Was ist die *Determinante* einer Matrix? Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ eine Matrix und B die Matrix, die man durch Addition der dritten Zeile von A zur zweiten erhält.
   Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinanten von A und B gleich sind.
   Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinante von $3A$ das 27-fache der Determinante von A ist.

2) Erläutern Sie das in Satz 184 angegebene Verfahren zur Berechnung von Determinanten. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -4 & 2 & -2 \\ 5 & 3 & -4 & -1 \\ -3 & -4 & -5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

   und

$$B := \begin{pmatrix} 555993 & 334567 & 345692 & 191919 \\ -3 & 5 & 0 & -3 \\ -4 & 1 & 0 & 6 \\ 4 & 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie dann die Determinanten von

$$2A,\ A^3 \cdot B^2 \quad \text{und von} \quad -3B\,.$$

3) Welche Eigenschaften von Determinanten wurden in der Vorlesung besprochen?
   Es seien A und B reelle 5×5-Matrizen mit $\det(A) = 2$ und $\det(B) = -5$. Berechnen Sie

$$\det(A^2 \cdot B^T \cdot A^T), \quad \det(-B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^T)\,,$$

$$\det(-3A) \quad \text{und} \quad \det(\frac{1}{2} \cdot B^2)\,.$$

4) Es sei n eine positive ganze Zahl. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix A mit $A_{ij} := i \cdot n + j$, $1 \leq i, j \leq n$. Hinweis: Schreiben Sie diese Matrix für $n = 1, 2, 3, 4$ an!

5) Wie kann man mit Hilfe der Determinante einer quadratischen Matrix entscheiden, ob diese invertierbar ist? Welche der folgenden reellen 2×2-Matrizen ist invertierbar? Versuchen Sie, das mit möglichst wenig Rechenaufwand zu entscheiden:

$$\begin{pmatrix} 197,568 & 349,344 \\ 231,456 & -451,122 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 324 & 689 \\ 138 & 261 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3,42 \cdot 10^5 & 1,67 \cdot 10^6 \\ 0,54 \cdot 10^4 & 1,23 \cdot 10^5 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $a < b < c < d$ sind, dann ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

invertierbar.

6) [nur für PS 1] Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum. Es seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte in der Zeichenebene. Weiters seien p' ein von q und r verschiedener Punkt auf der Geraden durch q und r, q' ein von p und r verschiedener Punkt auf der Geraden durch p und r und r' ein von q und p verschiedener Punkt auf der Geraden durch q und p. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen a, b, c so, dass

$$p = a(q - r') + r', \; q = b(r - p') + p', \; r = c(p - q') + q'$$

ist.

Zeigen Sie: Die Punkte p', q', r' sind genau dann kollinear, wenn $a \cdot b \cdot c = 1$ ist („Satz von Menelaos").

(Hinweis: Wir können annehmen, dass p der Nullpunkt der Zeichenebene ist. Zeigen Sie dann, dass (q, r) eine Basis der Zeichenebene ist und berechnen Sie die Koordinaten von $q' - p'$ und $r' - p'$ bezüglich dieser Basis).

6) [nur für PS 2] Berechnen Sie A^2, A^3 und A^4 für

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie: Sind alle Koeffizienten einer reellen $n \times n$-Matrix A, deren Zeilenindex größer oder gleich ihrem Spaltenindex ist, gleich 0, dann ist $A^n = 0$.