Lineare Algebra 1
PS1 bzw. PS2
WS 2014/15

Blatt 10, 15. Dezember 2014

1) Wie ist die *Hintereinanderausführung von Funktionen* definiert? Es seien
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ z \longmapsto -z+1\,,$$
und
$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ z \longmapsto 2z^2-3z+2\,,$$

Berechnen Sie die Zahlen $(f \circ g \circ f \circ g)(5)$ und $(g \circ f \circ g \circ f)(5)$. Für je zwei Funktionen h und k von $\mathbb{R}$ definieren wir die Summe $h+k$ dieser Funktionen durch:
für alle reellen Zahlen z ist $(h+k)(z) := h(z)+k(z)$.
Überprüfen Sie, ob für alle Funktionen h, k und m von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ die Distributivgesetze $(h+k)\circ m = (h\circ m)+(k\circ m)$ und $m\circ(h+k) = (m\circ h)+(m\circ k)$ gelten.

2) Was ist eine *bijektive Funktion*? Was ist die *Umkehrfunktion* einer bijektiven Funktion?
Es seien
$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -3 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}\,.$$
Überprüfen Sie, ob die Funktionen
$$f : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\ z \longmapsto A\cdot z\,,$$
und
$$g : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}\,,\ z \longmapsto B\cdot z\,,$$
bijektiv sind. Wenn ja, ermitteln Sie deren Umkehrfunktionen. Beschreiben Sie $f\circ g$ und $g\circ f$ sowie - falls f und g bijektiv sind - deren Umkehrfunktionen.

3) Was ist eine *Permutation*? Wie ist die *Hintereinanderausführung* von Permutationen definiert? Es seien
$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$
und
$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen. Berechnen Sie $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1}, $f^2 := f \circ f$ und $g^2 := g \circ g$.

4) Was ist eine *Transposition*? Es seien $1 \leq i < j \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$(i\,i{+}1)(i{+}1\,i{+}2)\dots(j{-}2\,j{-}1)(j{-}1\,j)(j{-}1\,j{-}2)\dots(i{+}1\,i) = (ij)$$

ist (z.B. ist $(34)(45)(56)(67)(65)(54)(43) = (37)$).
Schließen Sie daraus, dass jede Permutation in S_n das Produkt von Transpositionen der Form $(\ell\;\ell{+}1)$, $1 \leq \ell < n$, ist.

5) Was ist ein *Zykel*? Was ist das *Vorzeichen* einer Permutation? Wie kann das Vorzeichen einer Permutation berechnet werden? Schreiben Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 8 & 7 & 11 & 16 & 6 & 1 & 9 & 5 & 13 & 12 & 4 & 10 & 3 & 15 & 17 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

als Produkt von disjunkten Zykeln und berechnen Sie das Vorzeichen der Permutation. Schreiben Sie diese Permutation als Produkt von Transpositionen.

6) [nur für PS 1] Wann sind drei Punkte *kollinear*? Seien A, B, C drei nicht-kollineare Punkte in der Zeichenebene. Beschreiben Sie alle Punkte D in der Zeichenebene so, dass die vier Punkte A, B, C, D ein Parallelogramm bilden. Zeigen Sie, dass in einem Parallelogramm die Streckenmittelpunkte der zwei Diagonalen gleich sind.
Betrachten Sie dazu die Zeichenebene
   a) nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und beschreiben Sie die gesuchten Punkte als Summen oder Differenzen von A, B, C;
   b) als affinen Raum und beschreiben Sie die gesuchten Punkte durch die Punkte A, B, C und geeignete Translationen.

6) [nur für PS 2] Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, p_1, p_2 linear unabhängige Vektoren in V, b und v zueinander orthogonal stehende Vektoren $\neq 0$ und α_1 bzw. α_2 der Winkel zwischen $-b$ und p_1 bzw. zwischen b und p_2.
(„Technische Interpretation“: $\mathbb{R}\, b$ beschreibt eine Brücke, $\mathbb{R}_{\geq 0} p_1$ und $\mathbb{R}_{\geq 0} p_2$ beschreiben die zwei Schenkel eines Pfeilers der Brücke und v beschreibt eine normal zur Brücke auf den Pfeiler wirkende Kraft).
Berechnen Sie $u_1 \in \mathbb{R}\, p_1$ und $u_2 \in \mathbb{R}\, p_2$ so, dass $u_1 + u_2 = v$ ist. Für welche Winkel α_1, α_2 mit $\alpha_1 = \alpha_2$ ist $\|u_1\| \geq \|v\|$?