

Vertiefung Lineare Algebra 1

Schriftliche Unterlagen zur Vorlesung
im Wintersemester 2013/14

Franz Pauer

KAPITEL 1

Vertiefung zu Kap. 2, §3

In diesem Kapitel sei K ein Körper.

§1. Erzeugendensysteme, lineare Unabhängigkeit und Basen

In der Vorlesung „Lineare Algebra 1“ wurde der Begriff *Linearkombination* eines n -Tupels von Vektoren eingeführt. Wir erweitern diesen Begriff nun auf beliebige (auch unendliche) Familien $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren. Die Definition im Skriptum Lineare Algebra 1 entspricht dann dem Spezialfall $I := \{1, \dots, n\}$.

Definition 1: Sei V ein Vektorraum über K und I eine (beliebige) Menge. Eine Familie $(c_i)_{i \in I}$ von Elementen in K heißt *Koeffizientenfamilie*, wenn $c_i \neq 0$ für nur endlich viele $i \in I$ ist.

Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .

Ein Vektor $w \in V$ heißt eine *Linearkombination* von $(v_i)_{i \in I}$, wenn es eine Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i \in I}$ gibt, sodass

$$w = \sum_{i \in I, c_i \neq 0} c_i v_i$$

ist. Wir schreiben im weiteren einfach

$$\sum_{i \in I} c_i v_i \quad \text{anstatt} \quad \sum_{i \in I, c_i \neq 0} c_i v_i.$$

Die Menge aller Linearkombinationen von $(v_i)_{i \in I}$ ist ein Untervektorraum von V und enthält alle Vektoren v_i , $i \in I$. Er heißt der *von v_i , $i \in I$, erzeugte Untervektorraum von V* und wird mit

$${}_K \langle v_i \mid i \in I \rangle \quad \text{oder} \quad \sum_{i \in I} K v_i$$

bezeichnet.

Definition 2: Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum über K . Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren in V heißt genau dann ein *Erzeugendensystem* von V bzw. *linear unabhängig* in V bzw. eine *Basis* von V , wenn jeder Vektor in V auf mindestens eine bzw. höchstens eine bzw. genau eine Weise als Linearkombination von $(v_i)_{i \in I}$ geschrieben werden kann.

Wir schreiben *linear abhängig* anstatt *nicht linear unabhängig*.

Die leere Menge ist eine *Basis von $\{0\}$* .

Satz 3: Sei $V \neq \{0\}$ ein Vektorraum über K und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie von Vektoren in V .

- (1) Eine Basis von V ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem.
- (2) Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren ist genau dann ein Erzeugendensystem von V , wenn

$${}_K \langle v_i \mid i \in I \rangle = V$$

ist.

- (3) Die Familie $(v_i)_{i \in I}$ von Vektoren ist genau dann linear unabhängig, wenn für jede Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i \in I}$ aus

$$\sum_{i \in I} c_i v_i = 0$$

folgt, dass

$$c_i = 0 \quad \text{für alle } i \in I$$

ist.

Beweis:

- (1) und (2) folgen aus der Definition der Begriffe Erzeugendensystem, linear unabhängig und Basis.
- (3) Wenn sich jeder Vektor aus V auf höchstens eine Weise als Linearkombination von $(v_i)_{i \in I}$ schreiben lässt, dann folgt aus

$$\sum_{i \in I} c_i v_i = 0_V = \sum_{i \in I} 0_K v_i$$

auf Grund der Eindeutigkeit $c_i = 0_K$ für $1 \leq i \leq n$.

Sei umgekehrt $(v_i)_{i \in I}$ linear unabhängig in V und $w \in V$ so, dass es eine Koeffizientenfamilie $(c_i)_{i \in I}$ mit

$$w = \sum_{i \in I} c_i v_i$$

gibt. Falls $(d_i)_{i \in I}$ eine weitere Koeffizientenfamilie mit

$$w = \sum_{i \in I} d_i v_i$$

ist, erhält man

$$0_V = w - w = \sum_{i \in I} c_i v_i - \sum_{i \in I} d_i v_i = \sum_{i \in I} (c_i - d_i) v_i.$$

Nach Annahme folgt $c_i - d_i = 0_K$ für alle $i \in I$, also $c_i = d_i$ für alle $i \in I$.

Beispiel 4: Die Familie

$$(E_{kl})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq n}} = (E_{kl})_{(k,\ell) \in \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}}$$

der Standard-Matrizen ist eine Basis von $K^{m \times n}$ und heißt die *Standardbasis* von $K^{m \times n}$.

Für $A \in K^{m \times n}$ ist

$$A = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq n}} A_{k\ell} E_{k\ell},$$

also ist A die Koordinatenfamilie von A bezüglich der Standardbasis $(E_{k\ell})_{\substack{1 \leq k \leq m \\ 1 \leq \ell \leq n}}$ (und $A_{k\ell}$ die Koordinate von A bei $E_{k\ell}$).

Beispiel 5: Es seien I eine endliche Menge und V die Menge aller Funktionen von I in einen Körper K . Für $i \in I$ sei δ_i die durch

$$\delta_i(j) := \delta_{ij}, j \in I,$$

definierte Funktion von I nach K . Dann ist die Familie

$$(\delta_i)_{i \in I}$$

eine K -Basis von V . Für $f \in V$ ist

$$f = \sum_{i \in I} f(i) \delta_i.$$

Beispiel 6: Es sei K ein Körper und $F := \{(a_i)_{i \in \mathbb{N}} \mid a_i \in K, i \in \mathbb{N}\}$ die Menge aller Folgen in K . Mit den durch

$$(a_i)_{i \in \mathbb{N}} + (b_i)_{i \in \mathbb{N}} := (a_i + b_i)_{i \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad c \cdot (a_i)_{i \in \mathbb{N}} := (ca_i)_{i \in \mathbb{N}}$$

definierten Rechenoperationen wird F zu einem Vektorraum. Mit e_i ($i \in \mathbb{N}$) bezeichnen wir die Folge $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, wobei 1 an der i -ten Stelle steht. Die Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist linear unabhängig, aber kein Erzeugendensystem von F . Zum Beispiel kann die Folge $(1, 1, 1, \dots, 1, \dots)$ nicht als Linearkombination der Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ geschrieben werden.

Der von der Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ erzeugte Untervektorraum ist die Menge aller Folgen, von denen nur endlich viele Folgenglieder nicht 0 sind. Er heißt *Vektorraum der endlichen Folgen in K* . Die Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Basis dieses Vektorraums, daher ist er unendlich-dimensional.

§2. Rechnen mit Koordinaten

In diesem Abschnitt seien V und W endlich-dimensionale Vektorräume über K , $n \in \mathbb{N}$ die Dimension von V und $\underline{v} := (v_1, \dots, v_n)$ eine Basis von V .

Definition 7: Seien p und q positive ganze Zahlen und

$$\underline{u} := (u_1, \dots, u_p) \in V^p$$

ein p -Tupel von Vektoren in V . Für $T \in K^{p \times q}$ sei

$$\underline{u}T := ((\underline{u}T)_1, \dots, (\underline{u}T)_q) := \left(\sum_{i=1}^p T_{i1}u_i, \dots, \sum_{i=1}^p T_{iq}u_i \right) \in V^q.$$

Die Bezeichnung $\underline{u}T$ ist eine Merkhilfe, weil man analog zur Matrizenrechnung über K den Vektor $(\underline{u}T)_j \in V$ nach der Regel

„Zeile \underline{u} mal Spalte T_{-j} “

berechnet.

Satz 8: Seien p, q, r positive ganze Zahlen und $\underline{u} := (u_1, \dots, u_p) \in V^p$. Dann gilt:

- (1) $\underline{u}I_p = \underline{u}$
- (2) Für $T \in K^{p \times q}$ und $U \in K^{q \times r}$ ist $\underline{u}(TU) = (\underline{u}T)U$.
- (3) Für $T \in \text{GL}_p(K)$ und $\underline{u}' := \underline{u}T$ gilt $\underline{u} = \underline{u}'T^{-1}$.

Beweis: (1) gilt nach Definition, (2) rechnet man nach und (3) folgt aus $\underline{u} = \underline{u}I_p = \underline{u}(TT^{-1}) = (\underline{u}T)T^{-1} = \underline{u}'T^{-1}$.

Definition 9: Seien $w \in V$ und $c_1, \dots, c_n \in K$ die Koordinaten von w bezüglich \underline{v} , also

$$w = \sum_{i=1}^n c_i v_i = \underline{v}c \in V,$$

Dann heißt die Spalte

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in K^{n \times 1}$$

die *Koordinatenspalte* von w bezüglich \underline{v} .

Satz 10: Sei $\underline{u} := (u_1, \dots, u_q) \in V^q$. Dann gilt:

- (1) Es gibt genau eine Matrix $T \in K^{n \times q}$ mit

$$\underline{u} = \underline{v}T.$$

Diese Matrix T heißt die Transformationsmatrix von \underline{v} zu \underline{u} , und die Spalten von T sind die Koordinatenspalten von u_1, \dots, u_q bezüglich \underline{v} .

- (2) Die Familie \underline{u} ist genau dann eine Basis von V , wenn T invertierbar ist.

Beweis:

- (1) Sei $T \in K^{n \times k}$ jene Matrix, die sich durch Nebeneinanderschreiben der Koordinatenspalten von u_1, \dots, u_k bezüglich \underline{v} ergibt. Dann ist $u_j = \underline{v}T_{-j}$ für $1 \leq j \leq k$, also $\underline{u} = \underline{v}T$. Wenn umgekehrt $\underline{u} = \underline{v}S$ mit $S \in K^{n \times k}$ ist, d.h. $u_j = \underline{v}S_{-j}$ für $1 \leq j \leq k$, dann ist S_{-j} die Koordinatenspalte von u_j bezüglich \underline{v} für $1 \leq j \leq k$.
- (2) Wenn $T \in \text{GL}_n(K)$ ist, dann ist $\underline{v} = \underline{u}T^{-1}$ nach Satz 8, also sind die Vektoren v_1, \dots, v_n Linearkombinationen von u_1, \dots, u_n , somit ist ${}_K\langle u_1, \dots, u_n \rangle = V$ und, weil V n -dimensional ist, (u_1, \dots, u_n) eine Basis von V . Wenn umgekehrt \underline{u} eine Basis von V ist, dann gibt es eine Matrix $U \in K^{n \times n}$ mit $\underline{v} = \underline{u}U$. Weil \underline{u} eine Basis ist, folgt aus $\underline{u}I_n = \underline{v}T = \underline{u}(UT)$, dass $UT = I_n$ ist und analog $TU = I_n$, also ist $T \in \text{GL}_n(K)$.

Satz 11: Sei \underline{u} eine Basis von V und $T \in \text{GL}_n(K)$ die Transformationsmatrix von \underline{v} zu \underline{u} . Ist c die Koordinatenspalte von $w \in V$ bezüglich \underline{v} , dann ist

$$T^{-1}c$$

die Koordinatenspalte von w bezüglich \underline{u} , d.h. bei Basiswechsel mit der Matrix T „transformieren sich die Koordinaten“ mit der Matrix T^{-1} .

Beweis: Es ist $w = \underline{v}c = (\underline{u}T^{-1})c = \underline{u}(T^{-1}c)$.

Beispiel 12: Wir betrachten die Ebene E nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum. Wir wählen Punkte P_1, P_2 so, dass $\underline{P} := (P_1, P_2)$ eine Basis von E ist. Es sei

$$\underline{Q} := (Q_1, Q_2) := \left(\frac{3}{2}P_1 + 2P_2, \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{2}P_2\right).$$

Dann ist $\underline{Q} = \underline{P}T$, wobei

$$T := \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ist. Man prüft leicht nach, dass T invertierbar ist und dass

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 8 & -6 \end{pmatrix}$$

ist. Daher ist $\underline{P} = \underline{Q}T^{-1} = (-2Q_1 + 8Q_2, 2Q_1 - 6Q_2)$.

Der Punkt $P_1 + 2P_2$ hat bezüglich \underline{P} die Koordinatenspalte $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und

bezüglich \underline{Q} die Koordinatenspalte $T^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Somit ist $P_1 + 2P_2 = 2Q_1 - 4Q_2$.

KAPITEL 2

Vertiefung zu Kap. 3, §2

§1. Strahlensatz

Satz 13: („Strahlensatz“)

Es seien Z_1, Z_2 zwei verschiedene, einander im Punkt 0 schneidende Geraden in V , v_1, v_2 Punkte auf $Z_1 \setminus \{0\}$ und w_1, w_2 Punkte auf $Z_2 \setminus \{0\}$. Dann gibt es $c, d \in K \setminus \{0\}$ so, dass

$$v_2 = cv_1 \quad \text{und} \quad w_2 = dw_1$$

ist. Mit L_1 bzw. L_2 bezeichnen wir die Geraden durch die Punkte v_1 und w_1 bzw. v_2 und w_2 . Dann gilt:

- (1) L_1 und L_2 sind genau dann parallel, wenn $c = d$ ist.
- (2) Wenn L_1 und L_2 parallel sind, dann ist $v_2 - w_2 = c(v_1 - w_1)$.

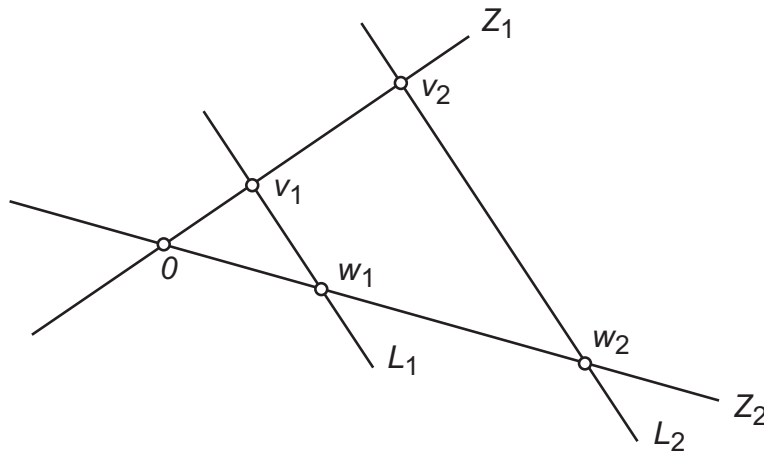


ABBILDUNG 1. Strahlensatz

Beweis:

- (1) Der zu L_1 bzw. L_2 parallele Untervektorraum ist $K(v_1 - w_1)$ bzw. $K(cv_1 - dw_1)$. Weil die Geraden Z_1 und Z_2 verschieden sind, sind die Vektoren v_1 und w_1 linear unabhängig. Daher ist $K(v_1 - w_1)$ genau dann gleich $K(cv_1 - dw_1)$, wenn $c = d$ ist.

(2) Wenn L_1 und L_2 parallel sind, ist $c = d$ und

$$v_2 - w_2 = cv_1 - cw_1 = c(v_1 - w_1).$$

Satz 14: Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K und $Z_1 = p_1 + U_1$, $Z_2 = p_2 + U_2$ affine Unterräume von V mit Aufpunkten p_1 , p_2 und parallelen Untervektorräumen U_1 , U_2 . Wenn Z_1 und Z_2 parallel sind, dann ist $Z_1 \subseteq Z_2$ oder $Z_2 \subseteq Z_1$ oder $Z_1 \cap Z_2 = \emptyset$.

Beweis: Wir nehmen o.E.d.A. an, dass $U_1 \subseteq U_2$ ist. Wenn $Z_1 \cap Z_2$ nicht leer ist, dann gibt es ein $p \in Z_1 \cap Z_2$. Daher ist $Z_1 = p + U_1 \subseteq p + U_2 = Z_2$.

§2. Affine Hülle

Es sei K ein Körper und V ein Vektorraum über K .

Definition 15: Es seien I eine endliche Menge und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V . Eine Linearkombination $\sum_{i \in I} c_i v_i$ von $(v_i)_{i \in I}$ heißt *affine Kombination* von $(v_i)_{i \in I}$, wenn $\sum_{i \in I} c_i = 1$ ist. Die Menge aller affinen Linearkombinationen von $(v_i)_{i \in I}$ heißt *affine Hülle* von $(v_i)_{i \in I}$.

Beispiel 16: Die affine Hülle von zwei Vektoren v_1 und v_2 ist ein Punkt, wenn $v_1 = v_2$ ist, bzw. die Gerade

$$\{c_1 v_1 + c_2 v_2 \mid c_1, c_2 \in K, c_1 + c_2 = 1\} = \{v_1 + c(v_2 - v_1) \mid c \in K\},$$

wenn $v_1 \neq v_2$ ist.

Satz 17:

- (1) Es seien M ein affiner Unterraum von V und $(v_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie in M . Dann ist die affine Hülle von $(v_i)_{i \in I}$ in M enthalten.
- (2) Die affine Hülle einer Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V ist ein affiner Unterraum von V . Der dazu parallele Untervektorraum wird von $(v_i - v_j)_{i \in I, i \neq j}$ erzeugt, wobei $j \in I$ beliebig gewählt werden kann.
- (3) Die affine Hülle von $(v_i)_{i \in I}$ ist der (bezüglich Inklusion) kleinste affine Unterraum, der alle v_i , $i \in I$, enthält.

Beweis:

- (1) Sei $p \in M$, U der zu M parallele Untervektorraum und $(c_i)_{i \in I}$ eine Familie in K mit $\sum_{i \in I} c_i = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} c_i v_i &= \left(\sum_{i \in I} c_i \right) p - \left(\sum_{i \in I} c_i \right) p + \sum_{i \in I} c_i v_i = \\ &= p + \sum_{i \in I} c_i (v_i - p) \in p + U = M. \end{aligned}$$

- (2) Sei $j \in I$ und

$$M := v_j + {}_K \langle v_i - v_j; i \in I, i \neq j \rangle.$$

Dann ist $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in M und nach (1) ist ihre affine Hülle in M enthalten.

Sei umgekehrt $(d_i)_{i \in I}$ eine Familie in K .

Dann ist

$$v_j + \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} d_i (v_i - v_j) = \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} d_i v_i + \left(1 - \sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} d_i \right) v_j$$

eine affine Linearkombination von $(v_i)_{i \in I}$. Daher ist jedes Element von M in der affinen Hülle von $(v_i)_{i \in I}$ enthalten.

- (3) Folgt aus (1) und (2).

Definition 18: Affine Unterräume von V heißen *kollinear* bzw. *koplanar*, wenn sie alle in einer Geraden bzw. Ebene in V enthalten sind.

Satz 19:

- (1) *Drei Punkte $v_1, v_2, v_3 \in V$ sind genau dann kollinear, wenn die Vektoren $v_2 - v_1$ und $v_3 - v_1$ linear abhängig sind.*
- (2) *Vier Punkte $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$ sind genau dann koplanar, wenn die Vektoren $v_2 - v_1, v_3 - v_1$ und $v_4 - v_1$ linear abhängig sind.*
- (3) *Zwei Geraden $p_1 + K v_1$ und $p_2 + K v_2$ sind genau dann koplanar, wenn die Vektoren $p_1 - p_2, v_1$ und v_2 linear abhängig sind.*

Beweis: Die ersten zwei Aussagen folgen aus Satz 17, (2). Der zur affinen Hülle von $(p_1, p_2, p_1 + v_1, p_2 + v_2)$ parallele Untervektorraum wird von $p_1 - p_2, v_1$ und v_2 erzeugt.

Satz 20: *Zwei verschiedene koplanare Geraden schneiden einander in genau einem Punkt oder sie sind parallel.*

Beweis: Seien M_1 und M_2 verschiedene koplanare Geraden und E die Ebene, die beide enthält. Wenn M_1 und M_2 nicht parallel sind, dann ist $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2$ ist der zu E parallele Untervektorraum. Wegen $p_1, p_2 \in E$ ist $p_1 - p_2 \in U_1 \oplus U_2$, daher gibt es eindeutig bestimmte Vektoren $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$ so, dass $p_1 - p_2 = u_1 + u_2$ ist. Somit ist $M_1 \cap M_2 = \{p_1 - u_1\} = \{p_2 + u_2\}$.

§3. Polytope und Schwerpunkte

Es seien $K = \mathbb{Q}$ oder \mathbb{R} und V ein Vektorraum über K .

Definition 21: Es seien I eine endliche Menge und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in V .

Eine Linearkombination $\sum_{i \in I} c_i v_i$ von $(v_i)_{i \in I}$ heißt *konvexe Linearkombination* von $(v_i)_{i \in I}$, wenn $\sum_{i \in I} c_i = 1$ und $c_i \geq 0$ für alle $i \in I$ ist.

Die Menge der konvexen Linearkombinationen von $(v_i)_{i \in I}$ heißt *konvexe Hülle* von $(v_i)_{i \in I}$.

Die konvexe Hülle zweier Vektoren v_1, v_2 heißt *Strecke* zwischen v_1 und v_2 .

Die konvexe Hülle dreier nicht kollinearere Punkte v_1, v_2, v_3 heißt *Dreieck* mit Eckpunkten v_1, v_2, v_3 .

Eine Teilmenge von V heißt *Polytop*, wenn sie die konvexe Hülle einer endlichen Familie in V ist.

Es sei $I := \{1, \dots, n\}$ und $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$. Für $c_n \neq 1$ ist

$$\sum_{i=1}^n c_i v_i = (1 - c_n) \left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1 - c_n} v_i \right) + c_n v_n = (1 - c_n) w + c_n v_n,$$

wobei $w := \sum_{i=1}^{n-1} \frac{c_i}{1 - c_n} v_i$ in der konvexen Hülle H von (v_1, \dots, v_{n-1}) liegt. Daraus folgt: Für $n \geq 3$ ist die konvexe Hülle von (v_1, \dots, v_n) die Vereinigung aller Strecken zwischen v_n und den Elementen von H .

Beispiel 22: Eine Teilmenge von \mathbb{R} ist genau dann ein Polytop, wenn sie ein abgeschlossenes Intervall ist.

Satz 23: Es seien P die konvexe Hülle einer Familie $(w_j)_{j \in J}$ in V und $(v_i)_{i \in I}$ eine Familie in P . Dann ist die konvexe Hülle von $(v_i)_{i \in I}$ in P enthalten.

Beweis: Für alle $i \in I$ ist der Vektor v_i eine konvexe Linearkombination

$\sum_{j \in J} c_{ji} w_j$ von $(w_j)_{j \in J}$.

Sei $\sum_{i \in I} d_i v_i$ eine konvexe Linearkombination von $(v_i)_{i \in I}$. Dann ist

$$\sum_{i \in I} d_i v_i = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} d_i c_{ji} w_j = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} d_i c_{ji} \right) w_j$$

mit $\sum_{i \in I} d_i c_{ji} \geq 0$, für alle $j \in J$, und

$$\sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} d_i c_{ji} \right) = \sum_{i \in I} d_i \left(\sum_{j \in J} c_{ji} \right) = \sum_{i \in I} d_i = 1.$$

Daher ist $\sum_{i \in I} d_i v_i \in P$.

Definition 24: Es sei $(v_i)_{i \in I}$ eine endliche Familie in V .
Der *Schwerpunkt* von $(v_i)_{i \in I}$ ist

$$\frac{1}{\#(I)} \sum_{i \in I} v_i.$$

Der Schwerpunkt von (v_1, v_2) heißt *Mittelpunkt der Strecke* zwischen v_1 und v_2 .

Satz 25: Es seien u, v, w drei nicht kollineare Punkte in V . Die Gerade durch u bzw. v bzw. w und den Mittelpunkt der Strecke zwischen den anderen zwei Punkten heißt *Schwerlinie des Dreiecks* mit Eckpunkten u, v, w durch u bzw. v bzw. w .

Die drei Schwerlinien sind paarweise verschieden und schneiden einander im Schwerpunkt $\frac{1}{3}(u + v + w)$ von (u, v, w) .

Beweis: Da u, v, w nicht kollinear sind, sind nach Satz 19 die Vektoren $v - u$ und $w - u$ linear unabhängig. Also sind auch

$$v - u \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(v - u) + \frac{1}{2}(w - u) = \frac{1}{2}(v + w) - u$$

linear unabhängig, nach Satz 19 sind daher $u, v, \frac{1}{2}(v + w)$ nicht kollinear. Somit liegt v nicht auf der Schwerlinie durch u . Daher sind die Schwerlinien durch u und durch v verschieden und die drei Schwerlinien haben

höchstens einen Schnittpunkt. Wegen

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(u+v+w) &= \frac{1}{3}u + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(v+w)\right) = \frac{1}{3}v + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(u+w)\right) = \\ &= \frac{1}{3}w + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}(u+v)\right)\end{aligned}$$

liegt der Schwerpunkt auf allen Schwerlinien.

§4. Affine Räume

Definition 26: Es seien (G, \star) eine Gruppe mit neutralem Element e und M eine Menge. Eine Funktion $G \times M \rightarrow M$, $(s, m) \mapsto s \cdot m$, ist eine *Operation der Gruppe G auf der Menge M* , wenn gilt:

für alle $m \in M$ ist $e \cdot m = m$ und

für alle $s, t \in G$ und alle $m \in M$ ist $(s \star t) \cdot m = s \cdot (t \cdot m)$.

Beispiel 27: Die Funktion

$$S_n \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \{1, 2, \dots, n\}, (\sigma, i) \mapsto \sigma(i),$$

ist eine Operation der Permutationsgruppe S_n auf der Menge $\{1, 2, \dots, n\}$.

Definition 28: Sei V ein Vektorraum über einem Körper K , A eine Menge und

$$V \times A \rightarrow A, (v, a) \mapsto v \cdot a,$$

eine Operation der Gruppe $(V, +)$ auf A . (Also: Für alle $a \in A$, $v, w \in V$ ist $0 \cdot a = a$ und $(v+w) \cdot a = v \cdot (w \cdot a)$.)

A zusammen mit dieser Operation ist ein *affiner Raum über V* , wenn es für alle Elemente $a, b \in A$ genau einen Vektor $v \in V$ gibt mit $v \cdot a = b$.

Die Elemente von A heißen dann *Punkte*, die Elemente von V *Vektoren* des affinen Raums.

Satz 29: Sei A ein affiner Raum über V und $a \in A$. Die Funktion

$$V \rightarrow A, v \mapsto v \cdot a,$$

ist bijektiv. (Nach Wahl eines „Nullpunktes“ kann ein affiner Raum als Vektorraum betrachtet werden).

Beweis: Folgt aus der Definition.

Beispiel 30: Sei V ein Vektorraum, $p \in V$ und U ein Untervektorraum von V . Dann ist der affine Unterraum $p + U$ mit

$$U \times (p + U) \longrightarrow p + U \quad (v, p + u) \longmapsto p + (u + v),$$

ein affiner Raum über U . Insbesondere ist jeder Vektorraum ein affiner Raum (über sich selbst).

Beispiel 31: Sei E die Zeichenebene oder der Anschauungsraum und $T(E)$ der Vektorraum der Translationen von E . Dann ist E mit

$$T(E) \times E \longrightarrow E, \quad (t, x) \longmapsto t(x),$$

ein affiner Raum über $T(E)$.

Möchte man in der Zeichenebene keinen „Nullpunkt“ wählen, kann man sie als affinen Raum betrachten. Dann muss man zwischen Punkten ($\in E$) und Vektoren ($\in T(E)$) unterscheiden. Punkte können dann nicht addiert werden, aber Vektoren können addiert werden und auf Punkten „wirken“.

Sind P und Q Punkte von E und $P \neq Q$, dann gibt es genau eine Translation in $T(E)$, die P auf Q abbildet. Sie wird häufig mit \vec{PQ} bezeichnet. Die Menge

$$\{t\vec{PQ} \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq T(E)$$

ist die Gerade durch $0_{T(E)} = id_E$ und \vec{PQ} in $T(E)$. Die „Gerade durch P und Q in E “ ist dann als

$$\{(t\vec{PQ})(P) \mid t \in \mathbb{R}\} \subseteq E$$

definiert. Wegen $(\vec{PQ})(P) = Q$ und $(0 \cdot \vec{PQ})(P) = id_E(P) = P$ sind P und Q Punkte dieser Geraden. Die Translation \vec{PQ} wird als „Richtungsvektor“ dieser Geraden bezeichnet.

KAPITEL 3

Vertiefung zu Kap. 3, §3-5

§1. Mehr über Skalarprodukte

In diesem Abschnitt sei V ein reeller Vektorraum und $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf V .

Definition 32: Ein reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt heißt *reeller Prähilbertraum*. Ein endlich-dimensionaler reeller Prähilbertraum heißt *euklidischer Raum*.

Beispiel 33: (Für Studierende mit Kenntnissen aus Analysis). Es seien a, b reelle Zahlen mit $a < b$ und V der Vektorraum aller stetigen Funktionen vom Intervall $[a, b]$ nach \mathbb{R} . Die Funktion

$$\langle -, - \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (f, g) \longmapsto \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx,$$

ist ein Skalarprodukt auf V . Die Norm von $f \in V$ ist

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}.$$

Satz 34: (*Parallelogrammgleichung*) Für alle Vektoren v und w in einem reellen Prähilbertraum ist

$$\|v + w\|^2 + \|v - w\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|w\|^2.$$

Beweis: Nachrechnen.

Definition 35: Eine *Norm* auf V ist eine Funktion

$$N : V \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} := \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq 0\}, \quad v \longmapsto N(v),$$

mit den Eigenschaften:

- (1) Es ist $N(v) = 0$ genau dann, wenn $v = 0$ ist.
- (2) Für alle $c \in \mathbb{R}$, $v \in V$ ist $N(cv) = |c|N(v)$.
- (3) Für alle $v, w \in V$ ist $N(v + w) \leq N(v) + N(w)$.

V zusammen mit einer Norm heißt *normierter Raum*.

Beispiel 36: Ist $\langle -, - \rangle$ ein Skalarprodukt auf V , dann ist

$$\| \cdot \| : V \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad v \longmapsto \|v\| := \sqrt{\langle v, v \rangle},$$

eine Norm.

Beispiel 37: Die Funktion

$$N : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \quad , \quad (c_1, c_2, \dots, c_n) \longmapsto \sum_{i=1}^n |c_i| \quad ,$$

ist eine Norm (die „Summennorm“) auf \mathbb{R}^n .

Die Parallelogrammgleichung gilt für diese Norm nicht, zum Beispiel ist für $n = 2$, $v := (2, 1)$ und $w := (1, 2)$:

$$N(v+w)^2 + N(v-w)^2 = 36 + 4 = 40, \text{ aber}$$

$$2 \cdot N(v)^2 + 2 \cdot N(w)^2 = 18 + 18 = 36.$$

Satz 38: N sei eine Norm auf V .

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- (1) Die Parallelogrammgleichung gilt für N , dh.: Für alle $v, w \in V$ ist $N(v+w)^2 + N(v-w)^2 = 2 \cdot N(v)^2 + 2 \cdot N(w)^2$.
- (2) Es gibt ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$, das die Norm N induziert, dh.: für alle $v \in V$ ist $N(v) = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

In diesem Fall ist dieses Skalarprodukt von $v, w \in V$ durch

$$\langle v, w \rangle := \frac{1}{4}(N(v+w)^2 - N(v-w)^2)$$

definiert.

Beweis: Wenn (2) gilt, dann folgt (1) aus Satz 34.

Wenn (1) gilt, dann kann damit nachgeprüft werden, dass die oben definierte Funktion $\langle -, - \rangle$ die Eigenschaften eines Skalarproduktes hat.

Definition 39: Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt *orthonormal* bezüglich $\langle -, - \rangle$, wenn für alle $i, j \in I$ gilt:

$$\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

Eine Familie $(v_i)_{i \in I}$ in V heißt *Orthonormalbasis* (kurz: *ON-Basis*) von V bezüglich $\langle -, - \rangle$, wenn sie eine Basis von V und orthonormal bezüglich $\langle -, - \rangle$ ist.

Beispiel 40: Es sei V der Vektorraum der endlichen Folgen in \mathbb{R} . Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichnen wir mit e_i die Folge $(0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, \dots)$, wobei 1 an der

i -ten Stelle steht. Die Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine Basis von V . Durch

$$\langle a, b \rangle := \sum_{i \in \mathbb{N}} a_i b_i, \text{ für alle Folgen } a, b \text{ in } \mathbb{N}$$

wird ein Skalarprodukt auf V definiert. Die Familie $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ist eine ON-Basis bezüglich dieses Skalarproduktes.

Satz 41: *Eine orthonormale Familie ist linear unabhängig. Insbesondere: Wenn V endlich-dimensional ist, dann ist jede orthonormale Familie mit $\dim_K(V)$ Elementen eine ON-Basis von V .*

Beweis: Sei $(v_i)_{i \in I}$ eine orthonormale Familie und $(c_i)_{i \in I}$ eine Koeffizienten-Familie in K . Wenn $\sum_{i \in I} c_i v_i = 0$ ist, dann ist für alle $j \in I$ auch

$$0 = \langle v_j, \sum_{i \in I} c_i v_i \rangle = \sum_{i \in I} c_i \langle v_j, v_i \rangle = c_j .$$

Satz 42: *Sei $w \in V$ und $(v_i)_{i \in I}$ eine ON-Basis von V . Dann ist*

$$w = \sum_{i \in I} \langle v_i, w \rangle v_i .$$

(„Die Koordinate von w bei v_i ist das Skalarprodukt von v_i mit w “.)

Beweis: Sei $w = \sum_{i \in I} c_i v_i$. Dann ist

$$\langle v_j, w \rangle = \langle v_j, \sum_{i \in I} c_i v_i \rangle = \sum_{i \in I} c_i \langle v_j, v_i \rangle = \sum_{i \in I} c_i \delta_{ji} = c_j .$$

§2. Interpolationsaufgaben

Wir betrachten die folgenden *Interpolationsaufgaben*:

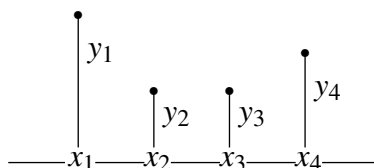
Gegeben sind

- Funktionen f_1, \dots, f_k von \mathbb{R} nach \mathbb{R} ,
- paarweise verschiedene reelle Zahlen $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ und
- reelle Zahlen $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R}$.

Gesucht sind reelle Zahlen c_1, \dots, c_k so, dass die Funktion $f := \sum_{i=1}^k c_i f_i$ die Bedingungen

$$f(x_1) = y_1, f(x_2) = y_2, \dots, f(x_n) = y_n$$

erfüllt.



Durch die Funktionen f_1, \dots, f_k wird der „Typ“ der Interpolationsaufgabe vorgegeben. Die reellen Zahlen x_1, \dots, x_n heißen *Stützstellen*, die reellen Zahlen y_1, \dots, y_n (*Funktions-*)*Werte* der Interpolationsaufgabe. Die gesuchte Funktion f heißt *interpolierende Funktion*.

Wir suchen also eine Funktion f des vorgegebenen Typs so, dass die Funktionswerte von f in den Stützstellen die vorgegebenen Werte der Interpolationsaufgabe sind.

Anders formuliert: Wir suchen Zahlen c_1, \dots, c_k so, dass

$$\begin{aligned} f_1(x_1)c_1 + f_2(x_1)c_2 + \dots + f_k(x_1)c_k &= y_1 \\ f_1(x_2)c_1 + f_2(x_2)c_2 + \dots + f_k(x_2)c_k &= y_2 \\ &\vdots \\ f_1(x_n)c_1 + f_2(x_n)c_2 + \dots + f_k(x_n)c_k &= y_n \end{aligned}$$

ist. Das ist ein System von n linearen Gleichungen mit k Unbekannten c_1, \dots, c_k . In Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} f_1(x_1) & \dots & f_k(x_1) \\ f_1(x_2) & \dots & f_k(x_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f_1(x_n) & \dots & f_k(x_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 43: („Lineare Interpolation“).

Wenn f_1 die konstante Funktion 1 (also die Funktion, die jeder Zahl die Zahl 1 zuordnet) und f_2 die Identität (also die Funktion, die jeder Zahl sich selbst zuordnet) ist, dann suchen wir eine Funktion $f := c_1 f_1 + c_2 f_2$ mit

$$(f(x_i) =) c_1 + c_2 x_i = y_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Die Aufgabe, Zahlen c_1 und c_2 mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 x_1 &= y_1 \\ &\vdots \\ c_1 + c_2 x_n &= y_n \end{aligned}$$

zu finden, ist ein System von n linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten. In Matrizenform

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Beispiel 44: (Interpolation durch Polynomfunktionen).

Für $1 \leq i \leq k$ sei $f_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto z^{i-1}$, die $i-1$ -te Potenzfunktion. Dann ist die gesuchte Funktion f eine Polynomfunktion vom Grad $k-1$, also $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto c_1 + c_2 z + \dots + c_k z^{k-1}$.

Wir suchen reelle Zahlen c_1, c_2, \dots, c_k mit der Eigenschaft, dass

$$\begin{aligned} c_1 + x_1 c_2 + \dots + x_1^{k-1} c_k &= y_1 \\ &\vdots \\ c_1 + x_n c_2 + \dots + x_n^{k-1} c_k &= y_n \end{aligned}$$

ist, müssen also ein System von n Gleichungen mit k Unbekannten lösen. In Matrizenform:

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{k-1} \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{k-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

§3. Systeme linearer Gleichungen (mit und ohne Lösung)

Das System

$$\begin{aligned} f_1(x_1)c_1 + f_2(x_1)c_2 + \dots + f_k(x_1)c_k &= y_1 \\ f_1(x_2)c_1 + f_2(x_2)c_2 + \dots + f_k(x_2)c_k &= y_2 \\ &\vdots \\ f_1(x_n)c_1 + f_2(x_n)c_2 + \dots + f_k(x_n)c_k &= y_n \end{aligned}$$

von k linearen Gleichungen mit den Unbekannten c_1, \dots, c_k kann auch in der Form

$$c_1 \begin{pmatrix} f_1(x_1) \\ \vdots \\ f_1(x_n) \end{pmatrix} + \dots + c_k \begin{pmatrix} f_k(x_1) \\ \vdots \\ f_k(x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

oder, mit den Abkürzungen

$$\mathbf{y} := \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) := \begin{pmatrix} f_i(x_1) \\ \vdots \\ f_i(x_n) \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i \leq k,$$

kurz als

$$\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$$

angeschrieben werden.

Wir können also das System linearer Gleichungen als die folgende Aufgabe interpretieren: Schreibe die Spalte \mathbf{y} als Linearkombination $\sum_{i=1}^k c_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x})$ der Spalten $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq k$. Das ist aber nur dann möglich, wenn \mathbf{y} in dem von den Spalten $\mathbf{f}_i(\mathbf{x})$, $1 \leq i \leq k$, erzeugten Untervektorraum U von $\mathbb{R}^{n \times 1}$ enthalten ist. Wenn das nicht der Fall ist, ist dieses System linearer Gleichungen nicht lösbar.

Im Fall von Beispiel „Lineare Interpolation“ ist U die von

$$\mathbf{1} := \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

erzeugte Ebene in $\mathbb{R}^{n \times 1}$.

Im Fall von Beispiel „Interpolation durch Polynomfunktionen vom Grad $\leq k$ “ ist U der von

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} x_1^{k-1} \\ \vdots \\ x_n^{k-1} \end{pmatrix}$$

erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^{n \times 1}$.

Wenn die Interpolationsaufgabe einerseits eine Situation beschreibt, von der man weiß, dass es eine Lösung gibt, andererseits die Aufgabe aber nicht lösbar ist, weil \mathbf{y} mit Mess- oder Rundungsfehlern behaftet ist, liegt es nahe, dass \mathbf{y} „eigentlich“ ein Element von U sein sollte. Wir erzwingen die Lösbarkeit der Aufgabe, indem wir \mathbf{y} durch eine Spalte \mathbf{y}' in U ersetzen!

Wie sollen wir diese Spalte \mathbf{y}' aber wählen? Am einfachsten ist es, \mathbf{y}' in U so zu wählen, dass der Abstand zwischen \mathbf{y}' und \mathbf{y} möglichst klein ist. Wir suchen also ein Element des Vektorraums U so, dass der Abstand $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|$ zwischen \mathbf{y} und \mathbf{y}' so klein wie möglich ist. Wir müssen nun festlegen, welchen Abstand wir meinen: Wenn wir den (durch das Standardskalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n induzierten) euklidischen Abstand im \mathbb{R}^n wählen, dann ist

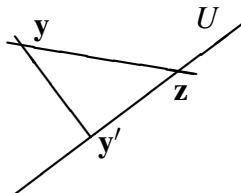
$$\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\| := \sqrt{\sum_{i=1}^n (y'_i - y_i)^2}.$$

Für positive reelle Zahlen a und b ist $a \leq b$ genau dann, wenn $a^2 \leq b^2$ ist. Daher ist der $\|\mathbf{y}' - \mathbf{y}\|$ genau dann minimal, wenn die Summe $\sum_{i=1}^n (y'_i - y_i)^2$ der „Fehlerquadrate“ minimal ist.

Die Spalte \mathbf{y}' ist der Fußpunkt des Lotes von \mathbf{y} auf U .

§4. Lineare Regression

Genau dann ist der Abstand zwischen \mathbf{y}' und \mathbf{y} kleiner oder gleich dem Abstand zwischen \mathbf{y} und jedem anderen Element \mathbf{z} von U , wenn die Gerade durch \mathbf{y}' und \mathbf{y} normal zum Untervektorraum U steht. Das folgt leicht aus dem Satz von Pythagoras:



Das Dreieck mit den Eckpunkten y' , y und z hat bei y' einen rechten Winkel. Der Abstand zwischen y und z ist die Länge der Hypotenuse, also größer oder gleich der Länge einer Kathete, also dem Abstand zwischen y und y' .

Die Gerade durch y' und y steht genau dann normal zu U , wenn alle Skalarprodukte von $y' - y$ mit den erzeugenden Spalten von U gleich 0 sind. Für $y' = \sum_{i=1}^k c_i \mathbf{f}_i(\mathbf{x}) \in U$ muss also gelten:

$$\langle y' - y, \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) \rangle = 0, 1 \leq j \leq k.$$

Anders geschrieben:

$$\sum_{i=1}^k c_i \langle \mathbf{f}_i(\mathbf{x}), \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) \rangle = \langle y, \mathbf{f}_j(\mathbf{x}) \rangle, 1 \leq j \leq k.$$

Wenn wir dieses System von k linearen Gleichungen mit k Unbekannten c_1, \dots, c_k lösen, dann erhalten wir die „annähernd“ interpolierende Funktion $f = \sum_{i=1}^k c_i f_i$.

Bei linearer Interpolation ist

- $y' = c_2 \mathbf{x} + c_1 \mathbf{1} \in U$ und
- die Gerade durch y und y' steht normal auf der von \mathbf{x} und $\mathbf{1}$ erzeugten Ebene U .

Also ist

- $\langle c_2 \mathbf{x} + c_1 \mathbf{1} - y, \mathbf{x} \rangle = 0$ und
- $\langle c_2 \mathbf{x} + c_1 \mathbf{1} - y, \mathbf{1} \rangle = 0$.

Daraus erhalten wir das folgende System von zwei linearen Gleichungen mit zwei Unbekannten c_1 und c_2 :

- $c_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle + c_1 \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{x}, y \rangle$
- $c_2 \langle \mathbf{x}, \mathbf{1} \rangle + c_1 \langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = \langle \mathbf{1}, y \rangle$

Als Lösung erhalten wir

$$c_2 = \frac{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \cdot \langle \mathbf{x}, y \rangle - \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{1}, y \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle^2} \quad \text{und} \quad c_1 = \frac{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{1}, y \rangle - \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle \cdot \langle \mathbf{x}, y \rangle}{\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle \cdot \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle^2}.$$

Wenn $\langle -, - \rangle$ das Standard-Skalarprodukt ist, dann ist $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, $\langle \mathbf{1}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i$, $\langle \mathbf{1}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n y_i$, $\langle \mathbf{1}, \mathbf{1} \rangle = n$, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$ und $\langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n y_i^2$, daher

$$c_2 = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}$$

und

$$c_1 = \frac{(\sum_{i=1}^n x_i^2)(\sum_{i=1}^n y_i) - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n x_i y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2}.$$

Wir haben damit die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $z \mapsto c_2 z + c_1$, so bestimmt, dass der (euklidische) Abstand vom n-Tupel der gegebenen (gemessenen oder gerundeten) ungenauen Funktionswerte (y_1, \dots, y_n) zum n-Tupel der berechneten Funktionswerte $(f(x_1), \dots, f(x_n))$ möglichst klein ist, also $\sum_{i=1}^n (y_i - (c_2 x_i + c_1))^2$ möglichst klein ist. Der Graph dieser Funktion heißt *Regressionsgerade* oder *Trendlinie* der Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Man rechnet leicht nach, dass

$$f\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

ist. Das Paar der arithmetischen Mittel von (x_1, \dots, x_n) und (y_1, \dots, y_n) liegt also immer auf der Regressionsgeraden.

KAPITEL 4

Mehr über lineare Funktionen

In diesem Kapitel sei K ein Körper.

§1. Der Graph einer linearen Funktion

Satz 45: Seien V_1, \dots, V_ℓ Vektorräume über K . Dann wird das kartesische Produkt

$$V_1 \times \cdots \times V_\ell = \{(x_1, \dots, x_\ell) \mid x_1 \in V_1, \dots, x_\ell \in V_\ell\}$$

mit der komponentenweisen Addition

$$(x_1, \dots, x_\ell) + (y_1, \dots, y_\ell) := (x_1 + y_1, \dots, x_\ell + y_\ell)$$

und der komponentenweisen Skalarmultiplikation

$$c(x_1, \dots, x_\ell) := (cx_1, \dots, cx_\ell)$$

mit $c \in K$ ein Vektorraum und heißt der Produktraum von V_1, \dots, V_ℓ .

Wenn $(v_{11}, \dots, v_{1n_1}), \dots, (v_{\ell 1}, \dots, v_{\ell n_\ell})$ Basen von V_1, \dots, V_ℓ sind, dann ist

$$\begin{aligned} &((v_{11}, 0, \dots, 0), \dots, (v_{1n_1}, 0, \dots, 0), \dots \\ &\dots, ((0, \dots, 0, v_{\ell 1}), \dots, (0, \dots, 0, v_{\ell n_\ell})) \end{aligned}$$

eine Basis von $V_1 \times \cdots \times V_\ell$, insbesondere gilt

$$\dim_K(V_1 \times \cdots \times V_\ell) = \dim_K(V_1) + \cdots + \dim_K(V_\ell).$$

Beweis: Es ist leicht zu zeigen, dass $V_1 \times \cdots \times V_\ell$ mit der komponentenweisen Addition und Skalarmultiplikation ein Vektorraum. Wir beweisen daher nur, dass

$((v_{11}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, v_{\ell n_\ell}))$ eine Basis von $V_1 \times \cdots \times V_\ell$ ist. Wir schreiben $x_1 \in V_1, \dots, x_\ell \in V_\ell$ als Linearkombinationen der Basen $(v_{11}, \dots, v_{1n_1}), \dots, (v_{\ell 1}, \dots, v_{\ell n_\ell})$:

$$x_1 = \sum_{i=1}^{n_1} d_{1i} v_{1i}, \dots, x_\ell = \sum_{i=1}^{n_\ell} d_{\ell i} v_{\ell i}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_\ell) &= (x_1, 0, \dots, 0) + \cdots + (0, \dots, 0, x_\ell) \\ &= \sum_{i=1}^{n_1} d_{1i} (v_{1i}, 0, \dots, 0) + \cdots + \sum_{i=1}^{n_\ell} d_{\ell i} (0, \dots, 0, v_{\ell i}) \end{aligned}$$

und $((v_{11}, 0, \dots, 0), \dots, (0, \dots, 0, v_{\ell n_\ell}))$ ein Erzeugendensystem von $V_1 \times \dots \times V_\ell$. Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, seien $c_{11}, \dots, c_{\ell n_\ell} \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}(v_{1i}, 0, \dots, 0) + \dots + \sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}(0, \dots, 0, v_{\ell i}) = (0, \dots, 0).$$

Dann ist

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}v_{1i}, \dots, \sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}v_{\ell i} \right) = (0, \dots, 0),$$

also

$$\sum_{i=1}^{n_1} c_{1i}v_{1i} = 0, \dots, \sum_{i=1}^{n_\ell} c_{\ell i}v_{\ell i} = 0.$$

Da $(v_{11}, \dots, v_{1n_1}), \dots, (v_{\ell 1}, \dots, v_{\ell n_\ell})$ Basen von V_1, \dots, V_ℓ sind, folgt $c_{11} = \dots = c_{\ell n_\ell} = 0$, was zu zeigen war.

Definition 46: Seien V und W Vektorräume über K .

Eine Funktion $f : V \rightarrow W$ heißt *K-linear*, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) Für alle $v, w \in V$ ist $f(v+w) = f(v) + f(w)$.
(„Das Bild der Summe ist die Summe der Bilder.“)
- (2) Für alle $c \in K$ und für alle $v \in V$ ist $f(cv) = cf(v)$.
(„Das Bild des c -fachen ist das c -fache des Bildes.“)

Beispiel 47: Ein Kaufhaus bietet n Waren an. Kauft jemand a_i Einheiten der i -ten Ware, $1 \leq i \leq n$, so muss er $p(a_1, \dots, a_n)$ Euro zahlen. Die Funktion

$$p : \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{Q}, (a_1, \dots, a_n) \longmapsto p(a_1, \dots, a_n)$$

ist genau dann linear, wenn es keinen Mengenrabatt, keine Sonderaktionen („nimm drei, zahl' zwei“) oder ähnliches gibt, also:

- (1) Nimmt man bei einem Einkauf a_i und bei einem anderen Einkauf b_i Einheiten der i -ten Ware, $1 \leq i \leq n$, dann bezahlt man in Summe dasselbe, wie wenn man alles bei einem Einkauf genommen hätte ($p(a_1, \dots, a_n) + p(b_1, \dots, b_n) = p(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n)$).
- (2) Kauft man von jeder Ware das c -fache, dann muss man c -mal soviel zahlen ($p(ca_1, \dots, ca_n) = c \cdot p(a_1, \dots, a_n)$).

Beispiel 48: V sei ein Untervektorraum des K -Vektorraums $\mathcal{F}(K, K)$ aller Funktionen von K nach K und t_0, \dots, t_n seien paarweise verschiedene Elemente von K . Dann ist die „Auswertungsfunktion“

$$a : V \longrightarrow K^{n+1}, f \longmapsto (f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_n)),$$

linear.

Beispiel 49: Für jede Matrix $A \in K^{m \times n}$ ist die Funktion

$$K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, x \mapsto Ax,$$

K -linear. Später werden wir sehen, dass jede lineare Funktion vom Vektorraum aller m -Spalten in den Vektorraum aller n -Spalten durch Multiplikation mit einer Matrix gegeben ist.

Satz 50: Es seien V und W Vektorräume über K und $(v_i)_{i \in I}$ eine (beliebige) Basis von V .

Eine Funktion $f : V \rightarrow W$ ist genau dann linear, wenn der Graph von f ein Untervektorraum des Produktraums $V \times W$ ist.

In diesem Fall hat der Graph von f die Basis $((v_i, f(v_i)))_{i \in I}$. Insbesondere gilt

$$\dim_K(\text{Graph}(f)) = \dim_K(V).$$

Beweis: Nach Definition ist $\text{Graph}(f) = \{(v, f(v)) \mid v \in V\} \subset V \times W$. Seien $u, w \in V$ und $c \in K$. Wenn f linear ist, dann ist

$$0_{V \times W} = (0_V, 0_W) = (0_V, f(0_V)) \in \text{Graph}(f),$$

$$(u, f(u)) + (w, f(w)) = (u+w, f(u) + f(w)) = (u+w, f(u+w)) \in \text{Graph}(f)$$

und

$$c(w, f(w)) = (cw, cf(w)) = (cw, f(cw)) \in \text{Graph}(f),$$

also $\text{Graph}(f)$ ein Untervektorraum von $V \times W$. Wenn umgekehrt $\text{Graph}(f)$ ein Untervektorraum von $V \times W$ ist, dann sind

$$(u, f(u)) + (w, f(w)) = (u+w, f(u) + f(w)) \in \text{Graph}(f) \text{ und}$$

$$c(w, f(w)) = (cw, cf(w)) \in \text{Graph}(f), \text{ somit}$$

$$f(u+w) = f(u) + f(w) \text{ und } f(cw) = cf(w), \text{ also } f \text{ linear.}$$

Wenn f linear ist, dann ist auch die Funktion

$$F : V \rightarrow \text{Graph}(f), x \mapsto (x, f(x)),$$

linear und hat die Umkehrfunktion $\text{Graph}(f) \rightarrow V, (x, f(x)) \mapsto x$. Daher ist F ein Isomorphismus und $(F(v_i))_{i \in I}$ eine Basis von $\text{Graph}(f)$.

Beispiel 51: Es sei k eine reelle Zahl und f die lineare Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, z \mapsto kz. \text{ Dann ist}$$

$$\text{Graph}(f) = \{(z, kz) \mid z \in \mathbb{R}\} = \{z(1, k) \mid z \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}(1, k) \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

die Gerade durch $(0, 0)$ und $(1, k)$.

Beispiel 52: Es seien a, b reelle Zahlen und g die lineare Funktion

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto ax + by. \text{ Dann ist}$$

$$\text{Graph}(g) = \{(x, y, ax + by) \mid x, y \in \mathbb{R}\} = \{x \cdot (1, 0, a) + y \cdot (0, 1, b) \mid x, y \in \mathbb{R}\} =$$

$$= \mathbb{R}(1, 0, a) + \mathbb{R}(0, 1, b) \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

die Ebene durch $(0, 0, 0)$, $(1, 0, a)$ und $(0, 1, b)$.

§2. Bild und Kern einer linearen Funktion

In diesem Abschnitt seien V und W Vektorräume über K und $f : V \rightarrow W$ eine lineare Funktion.

Definition 53: Die Menge

$$\text{Bild}(f) := \{f(v) \mid v \in V\} \subseteq W$$

heißt *Bild* von f und die Menge

$$\text{Kern}(f) := \{v \in V \mid f(v) = 0_W\} \subseteq V$$

heißt *Kern* von f .

Satz 54: $\text{Bild}(f)$ ist ein Untervektorraum von W , $\text{Kern}(f)$ ist ein Untervektorraum von V .

Die Dimension des Bildes von f heißt Rang von f (Schreibweise $\text{rg}(f)$).

Beweis: Da f linear ist, ist $0_V \in \text{Kern}(f)$. Für $u, v \in \text{Kern}(f)$ und $c \in K$ folgt aus $f(u+v) = f(u) + f(v) = 0_W$ auch $u+v \in \text{Kern}(f)$, sowie aus $f(cu) = cf(u) = 0_W$ auch $cu \in \text{Kern}(f)$. Daher ist $\text{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von V . Analog zeigt man, dass $\text{Bild}(f)$ ein Untervektorraum von W ist.

Satz 55: Sei $A \in K^{m \times n}$ und $L(A, 0) := \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = 0\}$ der Lösungsraum des durch A definierten Systems homogener linearer Gleichungen. Fasst man die Matrix A als lineare Funktion

$$A : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, x \mapsto Ax,$$

auf, dann ist $\text{Kern}(A) = L(A, 0)$ und $\text{Bild}(A) = {}_K \langle A_{-1}, \dots, A_{-n} \rangle$.

Beweis: Es ist $\text{Kern}(A) = \{x \in K^{n \times 1} \mid Ax = 0\} = L(A, 0)$ und $\text{Bild}(A) = \{Ax \mid x \in K^{n \times 1}\} = \{\sum_{i=1}^n x_i A_{-i} \mid x_1, \dots, x_n \in K\} = {}_K \langle A_{-1}, \dots, A_{-n} \rangle$.

Satz 56: Seien V, W endlich-dimensionale Vektorräume über K , $f : V \rightarrow W$ eine K -lineare Funktion und $r := \text{rg}(f)$. Dann gibt es eine Basis (v_1, \dots, v_n) von V so, dass

- (1) $(f(v_1), \dots, f(v_r))$ eine Basis von $\text{Bild}(f)$ und
- (2) (v_{r+1}, \dots, v_n) eine Basis von $\text{Kern}(f)$

ist. Insbesondere gilt

$$\dim_K(V) = \dim_K(\text{Bild}(f)) + \dim_K(\text{Kern}(f)).$$

Ergänzt man die Basis $(f(v_1), \dots, f(v_r))$ von $\text{Bild}(f)$ zu einer Basis (w_1, \dots, w_m) von W , dann ist

$$D_r := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \\ 0 & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & \ddots & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix} \in K^{m \times n}$$

(nur an den Stellen $(1,1), \dots, (r,r)$ stehen Einsen und sonst Nullen) die Matrix von f bezüglich der Basen (v_1, \dots, v_n) und (w_1, \dots, w_m) .

Beweis: Sei (w_1, \dots, w_r) eine Basis von $\text{Bild}(f)$. Dann kann man Urbilder $v_1, \dots, v_r \in V$ von w_1, \dots, w_r unter f wählen. Sei (u_1, \dots, u_s) eine Basis von $\text{Kern}(f)$. Dann ist

$$(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s)$$

ein Erzeugendensystem von V , weil für $y \in V$ aus

$$f(y) = \sum_{i=1}^r a_i w_i = \sum_{i=1}^r a_i f(v_i) = f\left(\sum_{i=1}^r a_i v_i\right)$$

folgt, dass $z := y - \sum_{i=1}^r a_i v_i \in \text{Kern}(f)$ ist. Daher ist $y = z + \sum_{i=1}^r a_i v_i$ eine Linearkombination von $(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s)$.

Wir zeigen noch, dass $(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s)$ linear unabhängig ist. Seien dazu $c_1, \dots, c_r, d_1, \dots, d_s \in K$ mit

$$\sum_{i=1}^r c_i v_i + \sum_{j=1}^s d_j u_j = 0.$$

Dann ist $0 = f\left(\sum_{i=1}^r c_i v_i + \sum_{j=1}^s d_j u_j\right) = \sum_{i=1}^r c_i f(v_i) = \sum_{i=1}^r c_i w_i$.

Da (w_1, \dots, w_r) linear unabhängig ist, sind alle c_i gleich 0. Dann ist $\sum_{j=1}^s d_j u_j = 0$, und aus der linearen Unabhängigkeit von u_1, \dots, u_s folgt $d_1 = \dots = d_s = 0$. Also ist $(v_1, \dots, v_r, u_1, \dots, u_s)$ die gesuchte Basis von V . Insbesondere ist $r + s = n$.

§3. Systeme linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form

Definition 57: Ein System linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form ist eine Aufgabe:

- Gegeben sind eine lineare Funktion $f: V \rightarrow W$ und ein Vektor $y \in W$.
- Gesucht ist eine „gute Beschreibung“ der Menge

$$L(f, y) := f^{-1}(\{y\}) = \{x \in V \mid f(x) = y\}$$

aller Vektoren $x \in V$, für die $f(x) = y$ ist.

Die Menge $L(f, y)$ heißt *Lösungsmenge* des durch f und y gegebenen Systems linearer Gleichungen. Ihre Elemente heißen *Lösungen* dieses Systems.

Das durch f und y gegebene System linearer Gleichungen heißt *homogen*, wenn $y = 0_W$ ist, ansonsten *inhomogen*. Die Lösungsmenge eines homogenen Systems linearer Gleichungen ist

$$L(f, 0) = \text{Kern}(f).$$

Satz 58: Sei $f : V \rightarrow W$ K -linear, $y \in W$ und $z \in L(f, y)$ (also ist $L(f, y)$ insbesondere nicht leer). Dann ist

$$L(f, y) = z + \text{Kern}(f)$$

ein affiner Unterraum von V mit Aufpunkt z und parallelem Untervektorraum $\text{Kern}(f)$.

Das durch f und y gegebene System „lösen“ bedeutet daher: finde (irgend)ein Urbild z von y unter f und (irgend)eine Basis von $\text{Kern}(f)$.

Falls V endlichdimensional ist, gilt weiters

$$\dim_K(L(f, y)) = \dim_K(V) - \text{rg}(f).$$

Beweis: Sei $v \in \text{Kern}(f)$. Dann ist $f(z + v) = f(z) + f(v) = y + 0 = y$, also $z + v \in L(f, y)$.

Sei $x \in L(f, y)$. Dann ist $f(x - z) = f(x) - f(z) = y - y = 0$, also $x - z \in \text{Kern}(f)$ und $x = z + (x - z) \in \{z + v \mid v \in \text{Kern}(f)\}$.

Nach Satz 56 ist $\dim_K(\text{Kern}(f)) = \dim_K(V) - \text{rg}(f)$.

Beispiel 59: Fasst man eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ als eine lineare Funktion

$$f : K^{n \times 1} \rightarrow K^{m \times 1}, x \mapsto Ax,$$

auf, dann ist $L(f, y) = L(A, y)$.

Beispiel 60: Sei $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig}\}$,
 $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f \mid f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ stetig differenzierbar}\}$ und

$$D : \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto f',$$

wobei f' die Ableitung der Funktion f bezeichnet. Dann sind $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ und $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit der punktweisen Addition und Skalarmultiplikation Vektorräume über \mathbb{R} , und die Funktion D ist \mathbb{R} -linear. Der Unterraum $\text{Kern}(D)$ besteht aus allen konstanten Funktionen. Eine Funktion $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ heißt *Stammfunktion* von $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, wenn $Df = g$ ist. Die Menge aller Stammfunktionen von g ist

$$L(D, g) = f + \text{Kern}(D).$$

Satz 61: Seien V, W Vektorräume über K der Dimensionen n, m mit Basen $\underline{v}, \underline{w}$, sei $f: V \rightarrow W$ K -linear mit Matrix

$$A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) \in K^{m \times n}$$

und $y = \underline{w}b \in W$. Dann bildet der Koordinaten-Isomorphismus

$$V \rightarrow K^{n \times 1}, \underline{v}c \mapsto c,$$

$L(f, y)$ auf $L(A, b)$ ab und $\text{Kern}(f)$ auf $L(A, 0)$.

Beweis: Es ist $\underline{v}c \in L(f, y)$ genau dann wenn $\underline{w}(Ac) = \underline{w}b$, also $c \in L(A, b)$ ist.

Nach Satz 61 kann für $f: V \rightarrow W$ und $y \in W$ das System linearer Gleichungen (f, y) wie folgt gelöst werden:

- (1) Wähle Basen $\underline{v}, \underline{w}$ von V, W .
- (2) Berechne die Matrix $A := M(f, \underline{v}, \underline{w})$ und die Koordinatenspalte b von y bezüglich \underline{w} .
- (3) Berechne die Lösungsmenge $L(A, b)$.
Wenn $L(A, b)$ leer ist, dann ist auch $L(f, y)$ leer.
Wenn $z \in L(A, b)$ und (u_1, \dots, u_s) eine Basis von $L(A, 0)$ ist, dann ist $\underline{v}z \in L(f, y)$ und $(\underline{v}u_1, \dots, \underline{v}u_s)$ eine Basis von $\text{Kern}(f)$.

Im Schulunterricht entsprechen Systeme linearer Gleichungen in koordinatenfreier Form gewissen „Textaufgaben“, und die Umwandlung in die Form $Ax = b$ nennt man „den Ansatz finden“.

Beispiel 62: Wir suchen alle Polynomfunktionen $p \in \mathbb{R}[x]$ mit

$$p(-1) = 2, p(1) = 1, p(2) = 1 \text{ und } \text{gr}(p) < 5.$$

Sei $V := \{q \in \mathbb{R}[x] \mid \text{gr}(q) < 5\}$, $W := \mathbb{R}^3$,

$$f: V \rightarrow W, q \mapsto (q(-1), q(1), q(2)),$$

und $y := (2, 1, 1) \in W$. Die Funktion f ist linear.

Wir wählen die Basis $\underline{v} := (1, x, x^2, x^3, x^4)$ von V und die Standardbasis $\underline{w} := (e_1, e_2, e_3)$ von $W = \mathbb{R}^3$. Dann ist

$$A := M(f, \underline{v}, \underline{w}) := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} \text{ und } b := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Man berechnet mit dem Gauß-Verfahren

$$L(A, b) = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathbb{R} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Daher ist

$$L(f, y) = \left\{ \frac{4}{3} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x^2 + \right. \\ \left. + c(-2 + x + 2x^2 - x^3) + d(-4 + 5x^2 - x^4) \mid c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Satz 63: Sei V ein endlich-dimensionaler Vektorraum über K und Z ein affiner Unterraum von V . Dann ist Z die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen, d.h. es gibt eine lineare Funktion $f: V \rightarrow W$ und einen Vektor $y \in W$ mit

$$Z = L(f, y).$$

(Dann ist Z durch f und y „in impliziter Form“ gegeben).

Wenn der affine Unterraum Z durch einen Aufpunkt p und eine Basis (u_1, \dots, u_k) des parallelen Untervektorraums gegeben ist, dann kann ein solches System linearer Gleichungen auf die folgende Weise berechnet werden:

Ergänze (u_1, \dots, u_k) zu einer Basis $(u_1, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n)$ von V .

Setze

$$f: V \longrightarrow K^{n-k}, \quad \sum_{i=1}^n c_i u_i \longmapsto (c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n)$$

und $y := f(p)$.

Beweis: Seien f und y wie im Satz definiert. Dann ist $\text{Kern}(f) = {}_K \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ und $p \in L(f, y)$. Nach Satz 58 ist $Z = L(f, y)$.