Lineare Algebra 1
PS 1
WS 2013/14

2. Dezember 2013

49)* Was ist eine *Orthonormalbasis*? Wie können die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Orthonormalbasis berechnet werden?
Wir betrachten das Standardskalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 1}$ aller reellen Spalten mit 2 bzw. 3 Zeilen. Zeigen Sie, dass die Spalten der folgenden Matrizen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 1}$ sind:

$$\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ -5 & 12 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} \\ 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{2\sqrt{2}}{5} & \frac{3\sqrt{2}}{10} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Orthonormalbasis.

50)* Zeigen Sie: Wenn W ein Untervektorraum eines euklidischen Raumes $(V, \langle -,- \rangle)$ ist, dann ist die Einschränkung von $\langle -,- \rangle$ auf $W \times W$ ein Skalarprodukt auf W. Mit diesem Skalarprodukt ist W ein euklidischer Raum.
Es sei W der von $(1,-1,2)$ und $(3,0,3)$ erzeugte Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$. Wir betrachten W mit der Einschränkung des Standardskalarproduktes (auf $\mathbb{R}^3$) als euklidischen Raum. Zeigen Sie, dass $(\frac{\sqrt{6}}{6}(1,-1,2), \frac{\sqrt{2}}{3}(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0))$ eine Orthonormalbasis von W ist. Berechnen Sie die Koordinaten von
$3(1,-1,2) + (3,0,3)$ bezüglich dieser Orthonormalbasis.

51)* Erläutern Sie das *Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren* zur Berechnung einer Orthonormalbasis. Berechnen Sie damit Orthonormalbasen des von

$$(-2,3,2) \quad \text{und} \quad (2,3,-1)$$

bzw. von

$$(\frac{3}{5},\frac{4}{5},0,0),\ (0,2,-1,2) \quad \text{und} \quad (1,-1,2,3)$$

erzeugten Untervektorraums von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ (mit dem Standardskalarprodukt).

52) Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum und $v, w \in \mathbb{R}^2$ mit $v \neq w$. Zeigen Sie, dass die Menge aller Zahlenpaare in $\mathbb{R}^2$, deren Abstand zu v und zu w gleich ist, eine Gerade in $\mathbb{R}^2$ ist und dass diese Gerade zur Geraden durch v und w orthogonal steht. (Diese Gerade heißt *Streckensymmetrale* der Strecke zwischen v und w).

53)* Was ist der *Fußpunkt des Lotes* eines Vektors auf einen Untervektorraum bzw. auf einen affinen Unterraum eines euklidischen Raumes? Was ist der *Abstand eines Punktes* von einem Untervektorraum bzw. von einem affinen Unterraum?
Berechnen Sie die Fußpunkte der Lote von $(2,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ (mit dem Standardskalarprodukt) auf die affinen Unterräume

$$\mathbb{R}\,(-2,2,1)\,,\ (-1,0,-1) + \mathbb{R}\,(2,1,2)$$

$$W := \mathbb{R}\,(4,2,-1) + \mathbb{R}\,(2,2,-1) \ \text{ und } \ (2,3,2) + W\,.$$

Berechnen Sie die Abstände von $(2,1,-1) \in \mathbb{R}^3$ zu diesen affinen Unterräumen.

54)* Was ist der *Winkel zwischen zwei Halbgeraden*, deren Anfangspunkte gleich sind? Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als euklidischen Raum mit dem Standardskalarprodukt.
Sei $A := (2,3,1)$ und $B := (1,-2,-2)$. Berechnen Sie den Cosinus des Winkels zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}A$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}B$.
Der Winkel zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}C$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}D$ ist $\frac{\pi}{4}$, der Abstand zwischen C und 0 ist 3 und der zwischen D und 0 ist 2. Berechnen Sie den Abstand zwischen C und D.