Lineare Algebra 1
PS1 bzw. PS2
WS 2013/14

25. November 2013

43) Wie kann man nach Wahl eines Nullpunktes die Zeichenebene in natürlicher Weise als Vektorraum betrachten? Sei E dieser Vektorraum. Welche Untervektorräume von E gibt es? Skizzieren Sie diese Untervektorräume. Beschreiben Sie geometrisch die Bedingungen, dass ein n-Tupel von Punkten linear unabhängig ist, dass ein n-Tupel von Punkten den Vektorraum E erzeugt und dass ein n-Tupel von Punkten eine Basis von E ist! Wählen Sie drei vom Nullpunkt verschiedene Punkte A, B, C und zeichnen Sie $(A + B) + C$, $A + (B + C)$, $2A$ und $A - B$!

44)* Was ist ein *affiner Unterraum* eines Vektorraums? Was ist eine *Gerade* in einem Vektorraum? Es sei G die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(3, -1)$, die zur Geraden durch $(0, 0)$ und $(2, 1)$ parallel ist. Es sei H die Gerade in $\mathbb{R}^2$ mit Aufpunkt $(1, -1)$, die zur Geraden durch $(0, 0)$ und $(\frac{3}{5}, 3)$ parallel ist. Berechnen Sie den Durchschnitt von G und H.

Berechnen Sie reelle Zahlen a, b, c, d, e, f so, dass

$$G = \{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = c\}$$

und

$$H = \{(x_1, x_2) \mid dx_1 + ex_2 = f\}$$

ist. (Dabei sollen die Zahlen a, b, d, e eigentlich nicht berechnet, sondern direkt hingeschrieben werden). Was ist dann $\{(x_1, x_2) \mid ax_1 + bx_2 = 0\}$ und $\{(x_1, x_2) \mid dx_1 + ex_2 = 0\}$? Berechnen Sie schließlich die Lösungsmenge des durch die Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$ und die Spalte $\begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}$ gegebenen Systems linearer Gleichungen.

45)* G sei eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ und E eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.
Der Durchschnitt $G \cap E$ kann leer, ein Punkt oder die Gerade G sein. Erläutern Sie, wie man $G \cap E$ berechnet, wenn
(a) G und E in impliziter Form
(b) G und E in Parameterform
(c) G in Parameterform und E in impliziter Form
(d) G in impliziter Form und E in Parameterform
gegeben sind.

46)* Was ist ein *Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum*? Was ist ein *euklidischer Raum*? Wie ist der *Abstand zwischen zwei Vektoren* in einem Vektorraum mit Skalarprodukt definiert? Wann stehen zwei Vektoren *zueinander senkrecht* oder *orthogonal*?
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie alle Abstände zwischen je zwei der folgenden Vektoren und überprüfen Sie, welche dieser Vektoren zueinander senkrecht stehen:

$$(1,2,-1),\ (0,1,2),\ (1,1,3),\ (5,-6,3)\,.$$

47)* Gibt es ein Skalarprodukt $\langle -,- \rangle$ auf $\mathbb{R}^3$ so, dass dessen Gram'sche Matrix bezüglich der Standardbasis gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ist? Wenn ja, berechnen Sie die Abstände zwischen je zwei der Vektoren von Aufgabe 46 bezüglich dieses neuen Skalarproduktes.

48)* Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und a, b, c drei verschiedene Punkte in V, die nicht alle auf einer Geraden liegen. Zwei Geraden $p + \mathbb{R}\,v$ und $q + \mathbb{R}\,w$ *stehen zueinander senkrecht* oder *normal*, wenn v und w zueinander senkrecht stehen. A bzw. B bzw. C sei die Gerade durch a bzw. b bzw. c, die senkrecht zur Geraden durch die anderen zwei Punkte steht.
Zeigen Sie: $A \cap B \cap C$ enthält genau einen Punkt.
(„Die Höhenlinien eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkt").
Hinweis: Sie können annehmen, dass $a = 0$ ist und (b, c) eine Basis von V ist.