Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2
WS 2013/14

18. November 2013

37) „In vier Räumen A, B, C, D befinden sich Bienen. Vom größten Raum A gibt es Öffnungen zu den kleineren Räumen B, C, D. Weiters gibt es eine Öffnung zwischen B und C. Innerhalb einer Minute fliegen je 20 Prozent der (sich in A befindenden) Bienen von A in die Räume B, C, D. Fünfunddreißig Prozent der Bienen in D fliegen nach A, von B je 30 Prozent nach A und C, von C je 25 Prozent nach A und B. In einer Minute können die Bienen in höchstens *einen* anderen Raum fliegen. Nach einer Minute sind 170 Bienen in A, 104 Bienen in B, 112 Bienen in C und 114 Bienen in D. Wieviele Bienen waren am Anfang in diesen Räumen?“
Beschreiben Sie diese Aufgabe durch ein System linearer Gleichungen und berechnen Sie eine Lösung. Wieviele Bienen werden nach zwei und nach drei Minuten in jedem Raum sein?

38) Ein Metallgitter der Form

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & D \arrow[r, dash] \arrow[d, dash] & E \arrow[r, dash] & F \\ G \arrow[r, dash] & A \arrow[r, dash] & B \end{tikzcd}$$

wurde erhitzt. Für die Gitterpunkte A, B, C, D, E soll gelten: Die Temperatur (in Celsiusgraden gemessen) in einem Gitterpunkt ist der Mittelwert der Temperaturen der benachbarten Gitterpunkte (also die Summe der Temperaturen geteilt durch die Anzahl der benachbarten Gitterpunkte). Berechne die Temperaturen in A, B, C, D, E unter der Annahme, dass die Temperaturen in F und G bekannt sind. Kann zu jeder Temperatur in F die Temperatur in G so gewählt werden, dass die Temperatur in C Null ist?

39)* Was ist eine *Basis* eines Vektorraums?
Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad u := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und } v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass die Spalten von A eine Basis von $\mathbb{Q}^{3\times 1}$ bilden und schreiben Sie u und v als Linearkombinationen dieser Basisvektoren.

40)* Was ist die *Dimension* eines Vektorraums? Was ist der *Rang* einer Matrix? Wie berechnet man damit die Dimension des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Systems linearer Gleichungen? Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Dimension des Lösungsraums des durch diese Matrix gegebenen homogenen Systems linearer Gleichungen. Berechnen Sie eine Basis dieses Vektorraums. Berechnen Sie eine Basis des Spaltenraums dieser Matrix und schreiben Sie die letzte Spalte der Matrix als Linearkombination dieser Basisvektoren an.

41)* Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis?
Zeigen Sie, dass $((3,2),(-3,1))$ eine Basis von $\mathbb{Q}^2$ ist. Berechnen Sie die Koordinatenspalten von $(1,1)$, $(1,3)$, und von $(2,3)$ bezüglich dieser Basis.
Zeigen Sie, dass

$$(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

eine Basis des Untervektorraums $\{A \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \mid A_{11}+A_{22} = 0\}$ von $\mathbb{Q}^{2\times 2}$ ist. Berechnen Sie die Koordinatenspalten der Matrizen $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 7 & 0 \end{pmatrix}$ bezüglich dieser Basis.

42)* Verwenden Sie Satz 103 zur Beantwortung der folgenden Fragen:
Welche der folgenden k-Tupel ($k = 5$ oder 2) sind linear unabhängig, welche sind ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^2$ bzw. $\mathbb{Q}^3$?
Wählen Sie aus den Erzeugendensystemen eine Basis aus und ergänzen Sie die linear unabhängigen k-Tupel zu einer Basis!

$$((0,0),(3,3),(-1,-1),(2,1),(5,1)),$$
$$((1,2,3),(0,1,2),(0,0,0),(1,3,5),(1,1,1)),$$
$$((3,1,-1),(3,1,4),(2,4,-4),(3,1,4),(2,4,-4)),$$
$$((4,8),(0,0),(-7,-14),(3,6),(-5,-10)),$$
$$((2,1,1),(1,1,1)).$$