

Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2
WS 2013/14

11. November 2013

- 31) Wann hat eine Matrix *Stufenform*? Welche der folgenden rationalen Matrizen haben Stufenform?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(0 \ 1 \ 2 \ 0), (1 \ 2 \ 0 \ 0),$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 32) A sei eine rationale Matrix in Stufenform mit m Zeilen und n Spalten. Begründen Sie:

- Das n -Tupel (A_{-1}, \dots, A_{-n}) der Spalten von A ist genau dann ein Erzeugendensystem von $\mathbb{Q}^{m \times 1}$, wenn die letzte Zeile von A nicht nur Nullen enthält.
- Das n -Tupel (A_{-1}, \dots, A_{-n}) der Spalten von A ist genau dann linear unabhängig, wenn in jeder Spalte ein Pivot steht.
- Das n -Tupel (A_{-1}, \dots, A_{-n}) der Spalten von A ist genau dann eine Basis von $\mathbb{Q}^{m \times 1}$, wenn A die Einheitsmatrix ist.

- 33)* A sei eine Matrix in Stufenform. Wie berechnet man eine Basis von $L(A, 0)$? Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix.

Bestimmen Sie für alle Matrizen A in Aufgabe 31, die Stufenform haben, eine Basis (über \mathbb{Q}) von $L(A, 0)$.

- 34)* A sei eine Matrix in Stufenform und (A, b) ein System linearer Gleichungen. Wie entscheidet man, ob dieses System eine Lösung hat und - wenn ja - wie schreibt man eine solche an? Verwenden Sie dazu die Interpretation des Produktes einer Matrix mit einer Spalte als Linearkombination der Spalten der Matrix. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad b := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

rationale Matrizen. Überprüfen Sie, ob $L(A, b)$ bzw. $L(A, c)$ leer ist oder nicht. Wenn nicht, berechnen Sie irgendein Element davon und eine Basis des rationalen Vektorraums $L(A, 0)$. Schreiben Sie damit die Lösungsmenge $L(A, b)$ an. Wie kann man weitere 100 Lösungen anschreiben?

- 35)* Durch welche (endlich vielen) Daten wird die Lösungsmenge eines Systems linearer Gleichungen beschrieben? Erläutern Sie den *Gauß-Algorithmus* zur Berechnung dieser Daten. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 4 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix},$$

$$b := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c := \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Lösungsmenge des durch (A, b) und des durch (A, c) gegebenen Systems linearer Gleichungen.

- 36)* Was ist die zu einer Matrix *inverse Matrix*? Erläutern Sie, wie man überprüft, ob eine Matrix invertierbar ist und - wenn ja - wie man die dazu inverse Matrix berechnet. Überprüfen Sie, ob die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & -2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4 \times 4},$$

invertierbar sind und berechnen Sie - wenn ja - die dazu inverse Matrix.