Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2
WS 2013/14

28. Oktober 2013

19) Was ist eine *Matrix*? Beschreiben Sie die folgenden Situationen jeweils durch eine Matrix:
   - Für die Herstellung der Produkte W, X, Y, Z stehen zwei Maschinen A, B zur Verfügung. Die Maschine A braucht 8 bzw. 5 bzw. 6 bzw. 9 Sekunden für die Produktion von W bzw. X bzw. Y bzw. Z; die Maschine B braucht dafür 4 bzw. 8 bzw. 5 bzw. 9 Sekunden.
     Welche Rechenoperation muss man mit der gesuchten Matrix ausführen, um die gleiche Situation zu beschreiben, wobei aber die Produktionszeiten in Minuten angegeben werden?
   - Es seien a, b, c, d, e Orte, a ist von b 8 km entfernt, d ist von b 11 km entfernt, a ist von c 12 km entfernt, c ist von e 7 km entfernt, c ist von b 8 km entfernt, a ist von e 10 km entfernt, c ist von d 11 km entfernt, d ist von e 7 km entfernt, a ist von d 13 km entfernt, e ist von b 10 km entfernt.

20) Wie ist die *Addition von Matrizen* definiert? Wie multipliziert man eine rationale Zahl mit einer rationalen Matrix? Berechnen Sie die rationalen Matrizen

$$\frac{-3}{14}A + \frac{7}{5}B \quad \text{und} \quad \frac{4}{5}A - \frac{4}{11}B\,,$$

wobei

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ -\frac{24}{36} & -\frac{68}{17} & -5 \end{pmatrix}$$

ist.

21) Wie ist *das Produkt von zwei Matrizen* definiert? Bilden Sie alle möglichen Produkte von je zwei der folgenden rationalen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{7} & 1 & \frac{-2}{3} & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ \frac{1}{6} & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{7} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & \frac{4}{3} & -1 & -2 \\ \frac{2}{5} & 1 & 5 & \frac{36}{12} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

22)* Was ist eine *Standardmatrix*? Was ist eine *Elementarmatrix*? Wählen Sie für jeden der drei Typen von rationalen 3×3-Elementarmatrizen je zwei Beispiele.
Multiplizieren Sie die Matrizen

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & -3 & 2 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2\pi & 0 \\ 3 & 3\pi \end{pmatrix}$$

von links mit jeder dieser 6 Matrizen. Beschreiben Sie in Worten, wie sich diese zwei Matrizen dabei verändern.

23)* Was sind *elementare Zeilenumformungen*? Beschreiben Sie den Zusammenhang von elementaren Zeilenumformungen und Elementarmatrizen.
Berechnen Sie Elementarmatrizen $P, Q, R \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ so, dass für alle Matrizen $A \in \mathbb{Q}^{5\times 5}$ die Matrix PA bzw. QA bzw. AR jene Matrix ist, die man aus A durch

- Subtraktion der 2-fachen dritten Zeile von A von der ersten Zeile von A erhält bzw.
- Multiplikation der fünften Zeile von A mit $\frac{1}{3}$ erhält bzw.
- Vertauschung der ersten und vierten Spalte von A

erhält.

24)* Wann ist eine Matrix *invertierbar*? Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \; D := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass A die zu C und B die zu D inverse Matrix ist.
Berechnen Sie dann die zu $A \cdot B$ und $B \cdot A$ inversen Matrizen.