Lineare Algebra 1
SL1 bzw. PS2
WS 2013/14

21. Oktober 2013

13) Was versteht man unter der *Zifferndarstellung* einer natürlichen Zahl? Wie kann man zwei natürliche Zahlen in Zifferndarstellung der Größe nach vergleichen?
Stellen Sie die Anzahl der Sekunden in einer Stunde durch Ziffern zur Basis zwei, zur Basis zehn und zur Basis sechzig dar.

Ordnen Sie die folgenden mit 32 bits dargestellten natürlichen Zahlen der Größe nach an:

10011110101011111001010100101011

01011101111011111111111111111111

11000011101010101010001110100001

01011101111011111111111111111110

10010111011111111111111100000001

14)* Es seien b eine positive ganze Zahl mit $b \geq 2$ und $z_n, \ldots, z_{-p}$ natürliche Zahlen, die alle kleiner als b sind. Was bedeutet dann $z_n z_{n-1} \ldots z_0 . z_{-1} \ldots z_{-p}$?
Es seien b, c, d, p positive ganze Zahlen mit $b \geq 2$. Wie berechnet man natürliche Zahlen $z_n, \ldots, z_{-p}$ mit $0 \leq z_n, \ldots, z_{-p} < b$ so, dass

$$0 \leq \frac{c}{d} - z_n z_{n-1} \ldots z_0 . z_{-1} \ldots z_{-p} < b^{-p}$$

ist? Führen Sie das für $b =$ zwei, $c =$ einundzwanzig, $d =$ neunundzwanzig und $p =$ vier aus. Ebenso für $b =$ zehn, $c =$ einundzwanzig, $d =$ neunundzwanzig und $p =$ vier.

15)* Was ist ein *kommutativer Ring*, was ist ein *Körper*? Beweisen Sie: Wenn a und b Elemente eines kommutativen Rings sind und n eine positive natürliche Zahl, dann ist

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,\ (a+b)(a-b) = a^2 - b^2,$$

und

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

16)* Was ist eine *bijektive Funktion*? Es sei I eine endliche Menge und $(c_\ell)_{\ell\in I}$ eine Familie von Elementen eines kommutativen Ringes. Was bedeuten

$$\sum_{\ell\in I} c_\ell \text{ und } \prod_{\ell\in I} c_\ell\,?$$

Es sei $M := \{-2, 3, 2, -1\}$. Stellen Sie mit Hilfe von $\sum$ und $\prod$ die Zahlen dar, die man wie folgt erhält:

a) Jedes Element von M wird quadriert, dann mit drei multipliziert und davon eins subtrahiert. Dann werden diese Zahlen zusammengezählt.

b) Zu jedem Element in M wird 3 addiert, jede dieser (neuen) Zahlen wird mit zwei multipliziert. Schließlich wird von diesen Zahlen das Produkt gebildet.

Berechnen Sie diese zwei Zahlen und beschreiben Sie genau, was Sie dabei tun!

17)* Sei $I := \{3, 1, 4, -1\}$. Die Funktionen f und g von I nach $\mathbb{Q}$ seien durch

$$f(j) := 2j^2 + 1,\ g(j) := j^2 - 2,\ (\text{für alle } j \in I),$$

definiert.
Berechnen Sie $\sum_{i\in I} f(i)$, $\prod_{i\in I} f(i)$, $\sum_{i\in I} g(i)$ und $\prod_{i\in I} g(i)$.

18)* Es seien m und n positive ganze Zahlen. Berechnen Sie

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}(2k+2)(3\ell-1) \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{m}\sum_{\ell=1}^{n}(3k-2\ell+1).$$