Proseminar Lineare Algebra 1
WS 2013/14

27. Jänner 2014

79)* Was ist eine *komplexe Zahl*? Wie sind *Addition* und *Multiplikation* von komplexen Zahlen definiert? Berechnen Sie reelle Zahlen a, b, c, d so, dass

$$(2 - \frac{1}{3}i)^{-1} = a + bi$$

und

$$(5 + 4i)(3 - 2i) = c + di$$

ist. Berechnen Sie Realteil und Imaginärteil aller komplexen Zahlen z mit der Eigenschaft $z^2 = -1 + 2i$.

80)* Berechnen Sie die Eigenwerte in $\mathbb{C}$ und die entsprechenden Eigenräume ($\leq \mathbb{C}^{2\times 1}$) der Matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} .$$

81)* Was ist eine *Orientierung* eines reellen Vektorraums? Was ist ein *orientierter Vektorraum*? Was ist das Vektorprodukt zweier Vektoren in einem dreidimensionalen euklidischen orientierten Raum?
Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ sei durch die Standardbasis orientiert. Ergänzen Sie $(\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1))$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$. Berechnen Sie die Vektorprodukte

$$v := (2, 3, 1) \times (-1, 2, -1) , \quad v \times (2, 0, 1) ,$$

und

$$(2, 3, 1) \times ((-1, 2, -1) \times (2, 0, 1)).$$

82)* Was ist ein *Parallelotop*, was ist ein *Parallelogramm*? Wie ist das *Volumen eines Parallelotops* definiert? Zeigen Sie: Wenn n Vektoren in einem n-dimensionalen euklidischen Raum ganzzahlige (bzw. rationale) Koordinaten bezüglich einer ON-Basis haben, dann ist das Volumen des von ihnen erzeugten Parallelotops eine ganze (bzw. rationale) Zahl.
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ als mit dem Standardskalarprodukt als euklidischen Raum. Wählen Sie einen Punkt (a, b) so, dass

$$(0,0),(-2,1),(2,3),(a,b)$$

die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden. Wieviele Möglichkeiten gibt es dazu? Berechnen Sie die Fläche dieser Parallelogramme. Wählen Sie dazu das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^2$.

83)* Was ist das *Vektorprodukt* zweier Vektoren in einem dreidimensionalen euklidischen orientierten Raum?
Es seien $v := (2, 1, 3) \in \mathbb{R}^3$ und $w := (1, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt und der Standardbasis als orientierten euklidischen Raum. Berechnen Sie $v \times w$, die Fläche des von v und w erzeugten Parallelogramms, den Abstand von $(1, 2, 3)$ zur Ebene, welche die Punkte 0, v und w enthält, und den Sinus des Winkels zwischen den Halbgeraden $\mathbb{R}_{\geq 0}v$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}w$.

84)* Was ist der *Graph* einer Funktion? Welche Eigenschaften hat der Graph einer linearen Funktion? Skizzieren Sie die Graphen der folgenden linearen Funktionen:

$$a : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ z \mapsto -3z\,,$$
$$b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto x - 2y\,,$$
$$c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ z \mapsto (3z, -z)\,,$$
$$d : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (y, -x)\,.$$