Proseminar Lineare Algebra 1
WS 2013/14

20. Jänner 2014

73) Was ist ein *Eigenwert*, was ist ein *Eigenvektor* einer Matrix? Was ist der *Eigenraum* einer Matrix zum Eigenwert c? Überprüfen Sie, ob eine oder mehrere der Spalten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektoren der Matrix

$$\begin{pmatrix} 15 & \frac{39}{2} & 0 & 8 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{23}{2} & -\frac{39}{2} & 0 & -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

sind. Bestimmen Sie gegebenenfalls die entsprechenden Eigenwerte.

74)* Wie kann man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix berechnen? Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrix

$$\begin{pmatrix} -6 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}.$$

75)* Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der Matrizen

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

76)* Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Zeigen Sie:
Genau dann ist 0 ein Eigenwert von A, wenn A nicht invertierbar ist.
Wenn A invertierbar ist und $c \in K$ ein Eigenwert von A ist, dann ist c^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} und die Eigenräume von A zum Eigenwert c und von A^{-1} zum Eigenwert c^{-1} sind gleich.
Berechnen sie die Eigenwerte und Eigenräume der zu

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

inversen Matrix.

77)* Was ist eine *Eigenbasis* einer Matrix? Berechnen Sie - wenn möglich - eine Eigenbasis der Matrix

$$N := \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{bzw.} \quad M := \begin{pmatrix} \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{1}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\,.$$

Falls N bzw. M eine Eigenbasis hat, sei $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix, deren Spalten die zwei berechneten Eigenbasisvektoren sind. Berechnen Sie dann $S^{-1}NS$ bzw. $T^{-1}MT$. Berechnen Sie die hunderttausendste Potenz der Matrizen M und N.

78)* Berechnen Sie reelle Zahlen k und d so, dass der Abstand zwischen $(3,5,4,2)$ und $(k+d, 2k+d, 3k+d, 4k+d)$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein wird. Erläutern Sie, warum man dafür den Fußpunkt des Lotes von $(3,5,4,2)$ auf der von $(1,1,1,1)$ und $(1,2,3,4)$ erzeugten Ebene berechnet. Warum genügt es, dazu ein System von 2 linearen Gleichungen mit 2 Unbekannten zu lösen? Was bedeutet diese Aufgabe für die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto k.z + d$?

Berechnen Sie reelle Zahlen a, b und c so, dass der Abstand zwischen $(3,5,4,2)$ und $(a+b+c, 4a+2b+c, 9a+3b+c, 16a+4b+c)$ in $\mathbb{R}^4$ (mit Standardskalarprodukt) möglichst klein wird. Erläutern Sie, warum man dafür den Fußpunkt des Lotes von $(3,5,4,2)$ auf den von $(1,1,1,1)$, $(1,2,3,4)$ und $(1,4,9,16)$ erzeugten Untervektorraum berechnet. Warum genügt es, dazu ein System von 3 linearen Gleichungen mit 3 Unbekannten zu lösen? Was bedeutet diese Aufgabe für die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, z \longmapsto a.z^2 + b.z + c$?