Lineare Algebra 1
PS 1
WS 2013/14

13. Jänner 2014

67)* Was ist die *Determinante* einer Matrix? Es seien $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ eine Matrix und B die Matrix, die man durch Addition der zweiten Spalte von A zur dritten erhält.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinanten von A und B gleich sind.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinante von $4A$ das 64-fache der Determinante von A ist.

68)* Erläutern Sie das in Satz 182 angegebene Verfahren zur Berechnung von Determinanten. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -2 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 4 & 334567 & 2 & 1 \\ -3 & 999998 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7555555 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie dann die Determinanten von

$$3A,\ A^2 \cdot B^3 \quad \text{und von} \quad -B\,.$$

69) Welche Eigenschaften von Determinanten wurden in der Vorlesung besprochen?
Es seien A und B reelle 5×5-Matrizen mit $\det(A) = 3$ und $\det(B) = -2$. Berechnen Sie

$$\det(A^3 \cdot A^T \cdot B^T), \quad \det(-B \cdot A^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^T)\,,$$

$$\det(-2A) \quad \text{und} \quad \det(-B^2)\,.$$

70)* Es sei n eine positive ganze Zahl. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix A mit $A_{ij} := i.n + j$, $1 \leq i, j \leq n$. Hinweis: Schreiben Sie diese Matrix für $n = 1, 2, 3, 4$ an!

71)* Wie kann man mit Hilfe der Determinante einer quadratischen Matrix entscheiden, ob diese invertierbar ist? Welche der folgenden reellen 2×2-Matrizen ist invertierbar? Versuchen Sie, das mit möglichst wenig Rechenaufwand zu entscheiden:

$$\begin{pmatrix} 197,568 & 349,344 \\ 231,456 & -451,122 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 324 & 689 \\ 138 & 261 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3,42.10^5 & 1,67.10^6 \\ 0,54.10^4 & 1,23.10^5 \end{pmatrix}$$

Beweisen Sie: Wenn a, b, c, d positive reelle Zahlen mit $a < b < c < d$ sind, dann ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$$

invertierbar.

72)* Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum. Es seien p, q, r drei nicht kollineare Punkte in der Zeichenebene und p' bzw. q' bzw. r' von q und r bzw. von p und r bzw. von p und q verschiedene Punkte auf der Geraden durch q und r bzw. von p und r bzw. von p und q. Dann gibt es eindeutig bestimmte Zahlen a, b, c so, dass

$$p = a(q - r') + r', \; q = b(r - p') + p', \; r = c(p - q') + q'$$

ist.
Zeigen Sie: Die Punkte p', q', r' sind genau dann kollinear, wenn $a \cdot b \cdot c = 1$ ist („Satz von Menelaos“).
(Hinweis: Wir können annehmen, dass p der Nullpunkt der Zeichenebene ist. Zeigen Sie dann, dass (q, r) eine Basis der Zeichenebene ist und berechnen Sie die Koordinaten von $q' - p'$ und $r' - p'$ bezüglich dieser Basis).
Betrachten Sie die Zeichenebene als affinen Raum über dem Vektorraum ihrer Translationen. Formulieren Sie den Satz von Menelaos in diesem Kontext.