Lineare Algebra 1
PS 1
WS 2013/14

16. Dezember 2013

61)* Was ist eine *Permutation*? Wie ist die *Hintereinanderausführung* von Permutationen definiert? Es seien

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

und

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 5 & 7 & 6 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen. Berechnen Sie $f \circ g$, $g \circ f$, f^{-1}, g^{-1}, $f^2 := f \circ f$ und $g^2 := g \circ g$.

62)* Was ist eine *Transposition*? Es seien $1 \leq i < j \leq n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$(i\; i{+}1)(i{+}1\; i{+}2) \ldots (j{-}2\; j{-}1)(j{-}1\; j)(j{-}1\; j{-}2) \ldots (i{+}1\; i) = (ij)$$

ist (z.B. ist $(34)(45)(56)(67)(65)(54)(43) = (37)$).
Schließen Sie daraus, dass jede Permutation in S_n das Produkt von Transpositionen der Form $(\ell\; \ell{+}1)$, $1 \leq \ell < n$, ist.

63)* Was ist ein *Zykel*? Was ist das *Vorzeichen* einer Permutation? Wie kann das Vorzeichen einer Permutation berechnet werden? Schreiben Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 \\ 9 & 7 & 11 & 1 & 6 & 16 & 8 & 5 & 13 & 12 & 4 & 10 & 3 & 15 & 17 & 2 & 14 \end{pmatrix}$$

als Produkt von disjunkten Zykeln und berechnen Sie das Vorzeichen der Permutation. Schreiben Sie diese Permutation als Produkt von Transpositionen.

64) Wie sind die *punktweise Addition* und die *punktweise Multiplikation* von Funktionen mit Bildbereich $\mathbb{R}$ definiert? Welche Rechenregeln gelten für diese Rechenoperationen?
Die Funktionen f, g, h von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ seien durch

$$f(r) := |r| + r \ , \ g(r) := 3r - 3|r| \ , \ h(r) := 18r|r| \ , \ (r \in \mathbb{R}),$$

definiert. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$(f+g)^2 = f^2 + g^2$;
$9f^2 - g^2 = 2h$;
$(f+g)^3 = f^3 + 222f^2 \cdot g + 22f \cdot g^2 + g^3$;
$(f \cdot h - g)^2 = h^2 + g$;
$f + g \cdot h = h - g \cdot f$.

65)* Wann sind drei Punkte *kollinear*? Seien A, B, C drei nichtkollineare Punkte in der Zeichenebene. Beschreiben Sie alle Punkte D in der Zeichenebene so, dass die vier Punkte A, B, C, D ein Parallelogramm bilden. Zeigen Sie, dass in einem Parallelogramm die Streckenmittelpunkte der zwei Diagonalen gleich sind.
Betrachten Sie dazu die Zeichenebene

a) nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und beschreiben Sie die gesuchten Punkte als Summen oder Differenzen von A, B, C;
b) als affinen Raum und beschreiben Sie die gesuchten Punkte durch die Punkte A, B, C und geeignete Translationen.

66)* Was ist die *konvexe Hülle* einer Familie von Vektoren? Was ist der *Schwerpunkt* einer Familie von Vektoren? Wir betrachten die Ebene nach Wahl eines Nullpunkts als reellen Vektorraum. Die Punkte v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 sind so gewählt, dass keiner dieser Punkte in der konvexen Hülle der anderen enthalten ist. Geben Sie ein Verfahren zur Konstruktion des Schwerpunktes von $(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ an.