Lineare Algebra 1
PS 1
WS 2013/14

9. Dezember 2013

55) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum, p_1, p_2 linear unabhängige Vektoren in V, b und v zueinander senkrecht stehende Vektoren $\neq 0$ und α_1 bzw. α_2 der Winkel zwischen $-b$ und p_1 bzw. zwischen b und p_2.
(„Technische Interpretation“: $\mathbb{R}\,b$ beschreibt eine Brücke, $\mathbb{R}_{\geq 0}p_1$ und $\mathbb{R}_{\geq 0}p_2$ beschreiben die zwei Schenkel eines Pfeilers der Brücke und v beschreibt eine normal zur Brücke auf den Pfeiler wirkende Kraft).
Berechnen Sie $u_1 \in \mathbb{R}\,p_1$ und $u_2 \in \mathbb{R}\,p_2$ so, dass $u_1 + u_2 = v$ ist. Für welche Winkel α_1, α_2 mit $\alpha_1 = \alpha_2$ ist $\|u_1\| \geq \|v\|$?

56)* Wie ist die *Hintereinanderausführung von Funktionen* definiert? Es seien

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\; z \longmapsto -2z + 3\,,$$

und

$$g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\; z \longmapsto 3z^2 - 2z + 1\,,$$

Berechnen Sie die Zahlen $(f \circ g \circ f \circ g)(3)$ und $(g \circ f \circ g \circ f)(3)$.
Für je zwei Funktionen h und k von $\mathbb{Q}$ definieren wir die Summe $h + k$ dieser Funktionen durch: für alle rationalen Zahlen z ist $(h + k)(z) := h(z) + k(z)$.
Überprüfen Sie, ob für alle Funktionen h, k und m von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ die Distributivgesetze $(h + k) \circ m = (h \circ m) + (k \circ m)$ und $m \circ (h + k) = (m \circ h) + (m \circ k)$ gelten.

57)* Was ist eine *bijektive Funktion*? Was ist die *Umkehrfunktion* einer bijektiven Funktion? Es seien

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\; z \longmapsto 5z - 7\,,$$

$$g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}\,,\; z \longmapsto 3z + 1\,,$$

$$h : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\; z \longmapsto (z + 1)^2 - 9\,,$$

und

$$k : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3\,,$$

$$(a_1, a_2, a_3) \longmapsto (a_1 + 3a_2 + 2a_3, a_1 + 9a_2 + 4a_3, 1a_1 + 27a_2 + 8a_3)\,.$$

Welche dieser Funktionen sind bijektiv ? Schreiben Sie deren Umkehrfunktionen an.

58)* Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} .$$

Überprüfen Sie, ob die Funktionen

$$f : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}, \ z \longmapsto A \cdot z ,$$

und

$$g : \mathbb{R}^{3\times 1} \longrightarrow \mathbb{R}^{3\times 1}, \ z \longmapsto B \cdot z ,$$

bijektiv sind. Wenn ja, ermitteln Sie deren Umkehrfunktionen. Wenn f und g bijektiv sind, beschreiben Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ sowie deren Umkehrfunktionen.

59)* Sei V ein Vektorraum. Was ist eine *Translation* in V? Wie sind die Addition und die Skalarmultiplikation im Vektorraum aller Translationen von V definiert? Was ist ein *Pfeil* in V?
Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und wählen Sie eine Basis (P, Q) dieses Vektoraums.
Die Translationen s und t sind durch $s(Q) = Q - P$ und $t(Q) = P$ definiert. Skizzieren Sie die Graphen von s, t und $s \circ t$, indem Sie einige Elemente dieser Graphen in die Ebene zeichnen.
Bilden die Translationen s und t eine Basis des Vektorraums aller Translationen der Ebene? Wenn ja, berechnen Sie die Koordinatenspalte der Translation r, die durch $r(0) = Q$ definiert ist, bezüglich dieser Basis.

60)* Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis? Was ist die *Transformationsmatrix* von einer Basis eines Vektorraums V zu einem q-Tupel von Vektoren in V? Wie kann man mit Hilfe dieser Transformationsmatrix entscheiden, ob dieses q-Tupel eine Basis von V ist?
Es sei $\underline{e}$ die Standardbasis von $\mathbb{R}^2$,

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} .$$

Zeigen Sie, dass $\underline{u} := \underline{e}A$ und $\underline{w} := \underline{u}B$ Basen von $\mathbb{R}^2$ sind. Berechnen Sie die Koordinatenspalten von e_1, e_2 und $2e_1 + 3e_2$ bezüglich der Basen $\underline{u}$ und $\underline{w}$. Berechnen Sie die Koordinatenspalte von $u_1 + 2u_2$ bezüglich der Basis $\underline{w}$.