Gleichungen - Aufgabenstellung und Lösungsstrategien

Franz Pauer

Institut für Fachdidaktik
und
Institut für Mathematik

Universität Innsbruck

Lange Nacht der Mathematik 2013
18. Oktober 2013

Was ist eine Gleichung?

Sind

- $1 + 1 = 2$
- $1 + 1 = 3$
- Schimmel = weißes Pferd
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $z + 3 = 5$
- Finde eine Zahl z so, dass $z + 3 = 5$ ist.
- $2x + 3y = 10$
- Finde alle Zahlenpaare (x, y) so, dass $2x + 3y = 10$ ist.

Gleichungen?

Was ist eine Gleichung?

- Fachsprache muss **einfach und verständlich** sein und aus der Umgangssprache heraus entwickelt werden

  Mit Fachworten sparsam umgehen, neue Fachworte aber sorgfältig einführen
- Das Wort ***Gleichung*** ist für Schüler/innen zunächst ein Fremdwort

Was ist eine Gleichung?

- Eine *lineare Gleichung mit einer Unbekannten* ist eine Aufgabe: Es sind Zahlen a, b, c, d gegeben. Gesucht ist eine Zahl z so, dass

  $$a.z + b = c.z + d$$

  ist.
  Kurzschreibweise: „Die Gleichung $a.z + b = c.z + d$“.
- Eine *lineare Gleichung mit zwei Unbekannten* ist eine Aufgabe: Es sind Zahlen a, b, c gegeben. Gesucht sind alle Zahlenpaare (x, y) so, dass

  $$a.x + b.y = c$$

  ist.
  Kurzschreibweise: „Die Gleichung $a.x + b.y = c$“.

Was ist eine Gleichung?

Eine *quadratische Gleichung* (mit einer Unbekannten) ist eine Aufgabe: Es sind Zahlen $a \neq 0, b, c$ gegeben. Gesucht sind alle Zahlen t so, dass

$$a.t^2 + b.t + c = 0$$

ist.
Kurzschreibweise: „Die Gleichung $a.t^2 + b.t + c = 0$“.

Was ist eine Gleichung?

Beispiele:

- Andreas sagt zu Maria: Denke Dir eine Zahl, addiere dazu 2, multipliziere das Ergebnis mit 3 und ziehe dann 2 ab. Maria sagt: Jetzt habe ich 16. Andreas soll nun die Zahl, die sich Maria gedacht hat, berechnen.
  Bezeichnen wir die Zahl, die sich Maria gedacht hat, mit z, dann ist $3(z+2) - 2 = 16$.

- Eine Bank verspricht, bei Einlage von 1000 Euro nach zwei Jahren 1040 Euro auszuzahlen. Welchem Zinssatz entspricht das?
  Bezeichnen wir den Zinssatz mit p, dann ist

$$1040 = 1000(1 + \frac{p}{100})^2 \ .$$

Wie löst man eine Gleichung?

Eine (bereits beim Euklidischen Algorithmus verwendete) **Strategie zur Lösung von Aufgaben** ist: Wenn man eine Aufgabe nicht sofort lösen kann, ersetzt man diese Aufgabe durch eine einfachere, die aber dieselben Lösungen hat.
Das wiederholt man solange, bis man bei einer Aufgabe landet, deren Lösungen man kennt.
Diese Lösungen sind dann auch die Lösungen der ursprünglichen Aufgabe.

Lösungsstrategie bei Gleichungen: Gehe von einer Gleichung zu einer „einfacheren Gleichung“ mit gleicher Lösungsmenge über.
Führe diesen Schritt „gezielt“ so lange aus, bis die Gleichung „trivial“ wird.

Wie löst man eine Gleichung?

- *Erlaubt umformen* heißt, eine Gleichung durch eine andere zu ersetzen, die aber dieselbe Lösungsmenge hat.
- Erlaubte Umformungen sind zum Beispiel: auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselbe Zahl addieren oder mit derselben Zahl $\neq 0$ multiplizieren.
- Bsp.: Die Umformung von
  $3(x+1)+2(x+y)-1 = x+y+3 \quad$ zu $\quad 4x+y=1$ ist erlaubt.
- Bsp.: Die Umformung von $a.t^2+b.t+c=0 \quad$ zu
  $t^2+\frac{b}{a}t+\frac{c}{a}=0$ ist erlaubt.

Wie löst man eine Gleichung?

Die Gleichung

$$3(x+2)-2=16$$

(„Finde eine Zahl z mit $3(z+2)-2=16$“), wird schrittweise auf

$$3x+4=16\,,$$

$$3x=12$$

und

$$x=4$$

umgeformt.
Die gesuchte Zahl ist also 4.

Wie löst man eine Gleichung?

Die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

wird schrittweise auf

$$x^2 + px + (\frac{p}{2})^2 + q = (\frac{p}{2})^2$$

und

$$(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$$

umgeformt.

Wenn $(\frac{p}{2})^2 - q \geq 0$ ist, ist $x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$ und

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$$

Gleichungen mit beliebig vielen Lösungen

Die Gleichung $a \cdot x + b \cdot y = c$ (mit $a \neq 0$) hat beliebig viele Lösungen. Wie kann man die Lösungsmenge durch endlich viele Daten darstellen?

Einfache Beobachtungen:

(1) Kennt man (irgend)eine Lösung der Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y = c,$$

dann erhält man alle Lösungen, indem man zu dieser alle Lösungen der Gleichung

$$a \cdot x + b \cdot y = 0$$

addiert.

(2) Ist (z_1, z_2) eine Lösung von

$$a \cdot x + b \cdot y = 0$$

und ist t eine Zahl, dann ist auch $t \cdot (z_1, z_2)$ eine Lösung.

Gleichungen mit beliebig vielen Lösungen

$(-b, a)$ ist eine Lösung von

$$a \cdot x + b \cdot y = 0$$

$(\frac{c}{a}, 0)$ eine Lösung von

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

Daher ist für alle Zahlen t

$$(\frac{c}{a}, 0) + t(-b, a)$$

eine Lösung von

$$a \cdot x + b \cdot y = 0\,.$$

Gleichungen mit beliebig vielen Lösungen

Die Lösungsmenge von

$$a \cdot x + b \cdot y = c$$

ist

$$\{(\frac{c}{a}, 0) + t(-b, a) \mid t \in \mathbb{R}\} \ .$$

Beachte: Zur Beschreibung der Lösungsmenge musste ausser der Division von c durch a keine Rechenoperation ausgeführt werden!

Geometrische Interpretation:
$\{(\frac{c}{a}, 0) + t(-b, a,) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ist die Gerade durch $(\frac{c}{a}, 0)$, die parallel zur Geraden durch $(0, 0)$ und $(-b, a)$ ist.
Damit *Begründung* für die Aussage „Die Lösungsmenge einer linearen Gleichung in zwei Unbekannten ist eine Gerade in der Ebene (nach Wahl eines Koordinatensystems)!

Gleichungen mit beliebig vielen Lösungen

Beispiel: Die Lösungsmenge von

$$1.234x + 5.678y = 9.012$$

ist

$$\{((9.012/1.234)\,,\,0) + t(-5.678\,,\,1.234) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Lösungsformeln?

Wie löst man die Gleichung $3x + 5 = 7$
($a \cdot x + b = c$ mit $a = 3,\ b = 5,\ c = 7$) ?

Durch Einsetzen in die „Lösungsformel“ $x = \frac{c-b}{a} = \frac{7-5}{3} = \frac{2}{3}$?

ODER

Durch Umformen von $3x + 5 = 7$ zu $3x = 2$ und $x = \frac{2}{3}$?

Lösungsformeln?

Wie löst man die Gleichung $x^2 + 4x + 3 = 0$
($x^2 + px + q = 0$ mit $p = 4,\ q = 3$) ?

Durch Einsetzen in die „Lösungsformel“

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q} = -2 \pm \sqrt{2^2 - 3}\,?$$

ODER

Durch Umformen von $x^2 + 4x + 3 = 0$ zu $(x+2)^2 + 3 = 4$,
dann zu $(x+2)^2 = 1$ und $x = -2 \pm 1$?

Danke für die Aufmerksamkeit!