Prüfung EM1 28. Jänner 2008

1. Die Menge der Eigenwerte der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ist

A. $\{1, 0\}$

B. $\{-1\}$

C. $\{0\}$

D. $\{0, -1, 1\}$

E. $\{0, -1\}$

---

2. Es seien V ein n-dimensionaler reeller Vektorraum, $< -, - >$ ein Skalarprodukt auf V und $||-||$ die davon induzierte Norm. Welche der folgenden Aussagen ist falsch?

A. Für alle $v, w \in V$ ist $| < v, w > | \leq ||v|| \cdot ||w||$.

B. Jedes orthonormale n-Tupel in V ist eine Basis von V.

C. Für alle $v, w \in V$ ist $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2$.

D. Für alle $v, w \in V$ ist $< v, 2v + 3w >= 2||v||^2 + 3 < v, w >$.

E. Wenn zwei Vektoren $v, w \in V$ zueinander orthogonal sind, dann ist $||v + w|| = ||v - w||$.

---

3. Es seien

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

A. A und B haben Stufenform, C nicht.

B. Nur C hat Stufenform.

C. B und C haben Stufenform, A nicht.

D. A, B und C haben Stufenform.

E. A und C haben Stufenform, B nicht.

---

4. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Die Menge S_n der Permutationen mit der Hintereinanderausführung von Funktionen ist eine kommutative Gruppe.
(2) Die Menge der Translationen der Ebene mit der Hintereinanderausführung von Funktionen ist eine kommutative Gruppe.
(3) Die Menge der ganzen Zahlen mit Addition und Multiplikation ist ein Körper.

A. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

B. (1), (2) und (3) sind wahr.

C. (1) und (3) sind falsch, (2) ist wahr, .

D. (1) und (2) sind falsch, (3) ist wahr.

E. (2) und (3) sind falsch, (1) ist wahr.

---

5. K sei ein Körper und $K[x]$ der Polynomring über K. Für $0 \neq f \in K[x]$ sei $gr(f)$ der Grad von f. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Ein Polynom $\neq 0$ ist genau dann in K[x] invertierbar, wenn sein Grad gleich 0 ist.
(2) Sind $p, q \in K[x]$ und $q \neq 0$, dann gibt es eindeutig bestimmte Polynome $m, r \in K[x]$ so, dass $p = m \cdot q + r$ ist.
(3) Wenn die Grade zweier Polynome $f \neq 0$, $g \neq 0$ verschieden sind, dann ist $f + g \neq 0$ und $gr(f + g) = max(gr(f), gr(g))$.

A. (1) und (2) sind falsch, (3) ist wahr.

B. (3) ist falsch, (1) und (2) sind wahr.

C. (1) ist falsch, (2) und (3) sind wahr.

D. (2) ist falsch, (1) und (3) sind wahr.

E. (1), (2) und (3) sind wahr.

---

6. Es seien $u, v, w \in \mathbb{R}^4$ und $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbildung mit $f(u) = (1, 1), f(2v) = (3, -4), f(-w) = (1, 2)$. Dann ist $f(u - 2v + 3w) =$

A. $(-5, -1)$

B. $(4, -1)$

C. $(4, 2)$

D. $(-3, 2)$

E. $(2, -2)$

---

7. Es seien $n \geq 2$ eine natürliche Zahl, V mit dem Skalarprodukt $< -,- >$ ein n-dimensionaler euklidischer Raum, $u, w \in V$ und $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Orthonormalbasis von V. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Die Zahl $< v_1, w >$ ist die Koordinate von w bei v_1 bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$.
(2) Der Vektor $< v_1, w > v_1 + < v_n, w > v_n$ ist der Fußpunkt des Lotes von w auf die Ebene durch 0, v_1 und v_n.
(3) Das Standardskalarprodukt der Koordinatenspalten von u und w bezüglich der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ ist gleich $< u, w >$.

A. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

B. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

C. (1), (2) und (3) sind wahr.

D. (2) und (3) sind wahr, (1) ist falsch.

E. (1) und (2) sind falsch, (3) ist wahr.

---

8. Es seien $z \in S_8$ ein Zykel der Länge 6, $p := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 9 & 3 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}$ eine Permutation in S_9 und $t \in S_8$ ein Produkt von 5 Transpositionen. Die Vorzeichen von z bzw. p bzw. t sind dann

---

A. 1 bzw. -1 bzw. -1

B. -1 bzw. 1 bzw. -1

C. 1 bzw. 1 bzw. 1

D. -1 bzw. -1 bzw. 1

E. -1 bzw. -1 bzw. -1

---

9. Welche der folgenden Teilmengen M des Vektorraums V ist kein Untervektorraum?

A. $V := \mathbf{Q}^4$, $M := \{(a, b, a + 2b, 3a - b)) \mid a, b \in \mathbf{Q}\}$.

B. $V := \mathbf{Q}^4$, $M := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 - x_2 + x_3 = x_4\}$.

C. V sei der Vektorraum aller Abbildungen von $\mathbf{Q}$ nach $\mathbf{Q}$,
$M := \{f \in V \mid f(1) = f(2)\}$.

D. $V := \mathbf{Q}^{2\times 2}$, $M := \{A \in V \mid rg(A) = 2\}$.

E. $V := \mathbf{Q}^{2\times 2}$, $M := \{A \in V \mid A_{11} + A_{22} = 0\}$.

---

10. Überprüfen Sie die folgenden Aussagen:
(1) Ein System homogener linearer Gleichungen mit mehr Unbekannten als Gleichungen hat mindestens zwei Lösungen.
(2) Jede invertierbare Matrix ist ein Produkt von Elementarmatrizen.
(3) Wenn ein System linearer Gleichungen mit gleich vielen Unbekannten wie Gleichungen mindestens eine Lösung hat, dann hat es genau eine Lösung.

A. (1) und (2) sind wahr, (3) ist falsch.

B. (1), (2) und (3) sind wahr.

C. (2) und (3) sind wahr,(1) ist falsch.

D. (1) und (3) sind wahr, (2) ist falsch.

E. (1) und (2) sind falsch, (3) ist wahr.

Prüfung EM1 28. Jänner 2008

11. Schreiben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe genau an!

Ein n-Tupel von Vektoren $(v_1, \ldots, v_n)$ in einem Vektorraum V ist genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn jeder Vektor in V ...

Eine Spalte x mit n Zeilen ist genau dann ein Eigenvektor einer $n \times n$-Matrix A, wenn ...

Es seien $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine Matrix mit reellen Koeffizienten. Das von den Spalten von M im Vektorraum aller reellen n-Spalten (mit dem Standardskalarprodukt) erzeugte Parallelotop ist die Menge

$$P(M_{-1}, \ldots, M_{-n}) := \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad ,$$

sein Volumen ist

$$vol(P(M_{-1}, \ldots, M_{-n})) :=$$

$A \in K^{n\times n}$ sei eine Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Der Rang von A ist ...

Prüfung EM1 28. Jänner 2008

12. Schreiben Sie die Definitionen der folgenden Begriffe genau an!

Es seien $f : X \longrightarrow Y$ und $g : Y \longrightarrow Z$ Funktionen. Die Hintereinanderausführung von f und g ist die Funktion $g \circ f : X \longrightarrow Z$ mit: Für alle $x \in X$ ist

$$(g \circ f)(x) = \ldots$$

$B \in K^{n \times n}$ sei eine Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Dann ist die Determinante von B

$$det(B) :=$$

Eine Abbildung f von einem Vektorraum V in einen Vektorraum W ist genau dann linear, wenn ...

Eine nicht-leere Teilmenge U eines Vektorraums V (über einem Körper K) ist ein affiner Unterraum von V genau dann, wenn ...

Prüfung EM1 28. Jänner 2008

13. Es sei $A := (A_{ij})_{1\leq i\leq 5, 1\leq j\leq 6}$ eine rationale 5×6-Matrix und $B := (B_{ij})_{1\leq i\leq 6, 1\leq j\leq 5}$ eine rationale 6×5-Matrix. Schreiben Sie den Eintrag in der 4. Zeile und 3. Spalte des Matrizenproduktes $B \cdot A$ an!

$$(B \cdot A)_{43} :=$$

Prüfung EM1 28. Jänner 2008

14. Es seien M eine rationale $m \times n$-Matrix und b eine rationale Spalte mit m Zeilen. Welche (endlich vielen) Daten werden (im Gauss-Verfahren) berechnet, um die Lösungsmenge $L(M, b)$ des durch M und b gegebenen Systems von linearen Gleichungen zu beschreiben?

Geben Sie diese Daten zur Beschreibung der Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$a + b + c + d = 1$$

an.

Wir nehmen an, dass $L(M, b)$ nicht leer ist und dass M Stufenform hat. Wie kann die Dimension von $L(M, b)$ aus den Zahlen $m, n, b_1, \ldots, b_m$, Determinante von M, Anzahl der Pivots von M berechnet werden? (Hinweis: es werden dazu nur zwei dieser Zahlen benötigt!).

$$dim(L(M, b)) =$$

Prüfung EM1 28. Jänner 2008

15. Es seien V ein dreidimensionaler reeller Vektorraum. Was ist eine Gerade in V? Was ist eine Parameterform, was ist eine implizite Form einer solchen Geraden? Wie berechnet man aus einer impliziten Form der Geraden eine Parameterform?

Prüfung EM1 28. Jänner 2008

16. Schreiben Sie den Satz über die Division mit Rest von Polynomen an! Beschreiben Sie den entsprechenden Algorithmus!