# Proseminar Einführung in die Mathematik 1
# WS 2009/10
# 26. November 2009

40) Wie ist die *Hintereinanderausführung von Funktionen* definiert? Was ist die *Umkehrfunktion* einer bijektiven Funktion? Es seien

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\ z \longmapsto -2z+3\,,$$

$$g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}\,,\ z \longmapsto (z-1)^2+1\,,$$

und

$$h : \mathbb{Q}^3 \longrightarrow \mathbb{Q}^3\,,$$

$$(a_1, a_2, a_3) \longmapsto (-a_1+2a_2+a_3, 2a_1+a_2+a_3, 3a_1-2a_2-a_3)\,.$$

Welche dieser Funktionen sind bijektiv ? Schreiben Sie deren Umkehrfunktionen an.
Berechnen Sie die Zahlen $(f\circ g\circ f\circ g)(1)$ und $(g\circ f\circ g\circ f)(-1)$, sowie ein Urbild von $(1,0,1)$ bezüglich $h$.

41) Was ist eine *Permutation*? Wie ist die *Hintereinanderausführung* von Permutationen definiert? Es seien

$$f := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 4 & 7 & 8 & 3 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$g := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 7 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$$

zwei Permutationen. Berechnen Sie $f\circ g$, $g\circ f$, $f^{-1}$, $g^{-1}$, $f^2 := f\circ f$ und $g^2 := g\circ g$.

42) Was ist eine *Transposition*? Es seien $1 \le i < j \le n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Produkt

$$(i\ i{+}1)(i{+}1\ i{+}2)\ldots(j{-}2\ j{-}1)(j{-}1\ j)(j{-}1\ j{-}2)\ldots(i{+}1\ i)$$

(zum Beispiel für $i=3$ und $j=6$: $(34)(45)(56)(54)(43)$ )
eine Transposition ist. Schließen Sie daraus, dass jede Permutation in $S_n$ das Produkt von Transpositionen der Form $(\ell\ \ell{+}1)$, $1\le \ell < n$, ist.

43) Was ist ein *Zykel*? Was ist das *Vorzeichen* einer Permutation? Wie kann das Vorzeichen einer Permutation berechnet werden? Schreiben Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & 20 \\ 17 & 16 & 11 & 8 & 6 & 20 & 5 & 9 & 13 & 2 & 4 & 12 & 3 & 15 & 14 & 18 & 7 & 10 & 19 & 1 \end{pmatrix}$$

als Produkt von disjunkten Zykeln und berechnen Sie das Vorzeichen der Permutation. Schreiben Sie diese Permutation als Produkt von Transpositionen.

44) Wie sind die *punktweise Addition* und die *punktweise Multiplikation* von Funktionen mit Bildbereich $\mathbb{Q}$ definiert? Welche Rechenregeln gelten für diese Rechenoperationen?
Die Funktionen $f, g, h$ von $\mathbb{Q}$ nach $\mathbb{Q}$ seien durch

$$f(r) := |r| + r \ , \ g(r) := 2r - 2|r| \ , \ h(r) := 16r|r| \ , \ (r \in \mathbb{Q}),$$

definiert. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?

$(f + g) \cdot (f - g) = f^2 - g^2$;
$4f^2 - g^2 = 4h$;
$(f + g)^3 = f^3 + 3f^2 \cdot g + 3f \cdot g^2 + g^3$;
$(2f - g)^2 = h$;
$g \cdot h = 4h$ .

45) Was ist eine *Polynomfunktion*? Was heißt „*eine Polynomfunktion in einem Element des Definitionsbereichs auswerten*“? Werten Sie die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q} \quad , \quad z \longmapsto -2 + 4z + 2z^2 - z^4 + 3z^6 - 3z^7 + z^8$$

in $\frac{1}{5}$ aus. Wieviele Multiplikationen sind dazu nötig?
Sei

$$g : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q}$$
$$z \longmapsto 4 + 3z^{68} + 5z^{69} - 3z^{70} + 2z^{71} + 3z^{74} + 3z^{75} + 5z^{80} + 765z^{234}$$

Berechnen Sie den 0-ten und den 75-ten Koeffizienten der Polynomfunktion $f \cdot g$.
Zeigen Sie, dass jede Funktion von $\mathbb{Z}_2$ nach $\mathbb{Z}_2$ eine Polynomfunktion (mit Koeffizienten in $\mathbb{Z}_2$) ist. (Hinweis: Wieviele Funktionen von $\mathbb{Z}_2$ nach $\mathbb{Z}_2$ gibt es ?)