

**Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/10**

5. November 2009

- 25) Was ist eine *Linearkombination* von Vektoren? Was ist ein *Erzeugendensystem eines Vektorraums*? Welche der folgenden drei n -Tupel ($n = 3$ bzw. 2 bzw. 4) von Paaren rationaler Zahlen sind Erzeugendensysteme des Vektorraums \mathbb{Q}^2 (über \mathbb{Q}) ?

$$((0, 3), (-1, 1), (4, 2)), \quad ((1, -2), (1, 1)),$$

$$((6, 12), (0, 0), (-5, -10), (3, 6)).$$

- 26) Was ist ein *linear unabhängiges n -Tupel* von Vektoren? Welche der folgenden drei n -Tupel ($n = 2$ oder 3) von Tripeln sind im Vektorraum \mathbb{Q}^3 (über \mathbb{Q}) linear unabhängig?

$$((4, 4, 6), (0, 0, 0)), \quad ((1, 0, -2), (0, 3, 0), (0, -1, 1)),$$

$$((1, 0, 0), (1, 1, 0)), \quad ((2, 1, 0), (0, 1, 2), (2, 2, 2)).$$

- 27) Was ist eine *Basis* eines Vektorraums? Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$\{A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3} \mid A_{11} + A_{22} + A_{33} = 0, A_{12} = A_{13} = A_{23} = 0\}$$

ein Untervektorraum von $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$ ist. Bestimmen Sie drei Basen dieses Untervektorraums.

- 28) Wann hat eine Matrix *Stufenform*? Welche der folgenden rationalen Matrizen haben Stufenform?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ (0 \ 1 \ 2 \ 3), (1 \ 2 \ 3 \ 4), \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 29) A sei eine Matrix in Stufenform. Wie überprüft man, ob ein System linearer Gleichungen (A, b) eine Lösung hat? Durch welche endlich vielen Daten wird dessen Lösungsmenge beschrieben? Wie kann man diese Daten aus A und b ablesen?

Bestimmen Sie für alle Matrizen A in Aufgabe 28, die Stufenform haben, eine Basis (über \mathbb{Q}) von $L(A, 0)$.

Überprüfen Sie dann, ob das durch (A, b) gegebene System linearer Gleichungen eine Lösung hat, dabei sei b die Spalte

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } (1), \text{ wenn } A \text{ drei bzw. zwei bzw. eine Zeile}$$

hat. Wenn ja, bestimmen Sie (irgend)ein Element von $L(A, b)$.

- 30) Beschreiben Sie, welche (endlich vielen) Ausgabedaten bei den folgenden zwei Aufgaben zu berechnen sind. Beschreiben Sie die Eingabedaten durch eine Matrix A und eine Spalte b mit jeweils einer Zeile.

– Gegeben seien die rationalen Zahlen a, b, c . Beschreiben Sie die Menge aller Paare von rationalen Zahlen (x, y) , für die $ax + by = c$ ist.

– Gegeben seien die rationalen Zahlen r, s, t, u . Beschreiben Sie die Menge aller Tripel von rationalen Zahlen (x_1, x_2, x_3) , für die $rx_1 + sx_2 + tx_3 = u$ ist.

Welche Bedingungen müssen die Zahlen a, b bzw. r, s, t erfüllen, damit die Matrix A Stufenform hat? Schreiben Sie in diesem Fall die gesuchten Daten an, ohne irgendeine Rechnung auszuführen. Was muss man tun, wenn die Matrix A nicht Stufenform hat?