

**Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/10**

29. Oktober 2010

- 19) Was ist eine *Standardmatrix*? Es seien p, q positive ganze Zahlen, i, j, k, ℓ ganze Zahlen mit $1 \leq i, j \leq p, 1 \leq k, \ell \leq q$ und A eine $p \times q$ -Matrix mit rationalen Koeffizienten. Berechne

$$E_{ij} \cdot A \text{ und } A \cdot E_{k\ell},$$

wobei $E_{ij} \in \mathbb{Q}^{p \times p}$ und $E_{k\ell} \in \mathbb{Q}^{q \times q}$ Standardmatrizen sind.

Was ist eine *Elementarmatrix*? Wieviele Elementarmatrizen gibt es in $(\mathbb{Z}_2)^{2 \times 2}$? (Dabei ist $\mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ der Körper mit nur zwei Elementen).

- 20) Was sind *elementare Zeilenumformungen*? Beschreiben Sie den Zusammenhang von elementaren Zeilenumformungen und Elementarmatrizen.

Berechnen Sie Elementarmatrizen $P, Q, R \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ so, dass für alle Matrizen $A \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ die Matrix PA bzw. QA bzw. RA jene Matrix ist, die man aus A durch

- Addition der 3-fachen zweiten Zeile von A zur ersten Zeile von A erhält bzw.
- Multiplikation der dritten Zeile von A mit 7 erhält bzw.
- Vertauschung der ersten und dritten Zeile von A erhält.

- 21) Welche *Rechenregeln* gelten für die Matrizenaddition und -multiplikation in $\mathbb{Q}^{n \times n}$? Welche Bedingung müssen zwei Matrizen M und N in $\mathbb{Q}^{n \times n}$ erfüllen, damit

$$(M - N)^2 = M^2 - 2M \cdot N + N^2$$

und

$$M^2 - N^2 = (M + N) \cdot (M - N)$$

ist? (Dabei ist $M^2 := M \cdot M$ und $N^2 := N \cdot N$).

22) Wann ist eine Matrix *invertierbar*? Es seien

$$A := \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C := \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad D := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass C die zu A und D die zu B inverse Matrix ist. Berechnen Sie dann die zu $A \cdot B$ und $B \cdot A$ inversen Matrizen.

23) Was ist ein *System linearer Gleichungen*? Was ist die *Lösungsmenge* eines solchen Systems und welche Eigenschaften hat diese?

Es seien $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ rationale Spalten mit den Eigenschaften $2a + 7b - 3c = 0$ und $2a' + 7b' - 3c' = 0$.

Zeigen Sie, dass die Summe dieser zwei Spalten und alle rationalen Vielfachen jeder dieser Spalten dieselben Eigenschaften haben.

Zeigen Sie, dass die folgende Aufgabe als System linearer Gleichungen aufgefasst werden kann (dieses braucht aber nicht gelöst zu werden): „Auf einem Bauernhof stehen die vier Sorten A, B, C, D von Futtermitteln zur Verfügung. Jede Sorte ist eine Mischung von 3 Grundprodukten (wir bezeichnen sie mit X, Y und Z), und zwar im Verhältnis 1:1:3 (A), 1:4:1 (B), 2:1:1 (C) und 3:2:1 (D). Ein Schwein möchte je ein Kilogramm von X, Y und Z fressen (insgesamt also 3 Kilogramm). Kann ihm dieser Wunsch durch geeignete Mischung der Sorten A, B, C, D erfüllt werden?“

Durch welche Matrix und welche Spalte ist dieses System linearer Gleichungen gegeben? Was ist gesucht?

24) Was ist ein *Vektorraum*? Was ist ein *Untervektorraum* eines Vektorraums? Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume des Vektorraums $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ (über \mathbb{Q}) aller rationalen 2×2 -Matrizen?

$$\{A \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid A \text{ invertierbar} \},$$

$$\{A \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid A_{12} + A_{22} + A_{21} + A_{11} = 0\},$$

$$\{A \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid A_{12} + A_{22} + A_{21} + A_{11} = 1\},$$

$$\{E_{12} - xE_{11} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid x \in \mathbb{Q}\},$$

$$\{uE_{22} + vE_{21} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2} \mid u, v \in \mathbb{Q}\}.$$

(Die Matrizen E_{ij} sind Standardmatrizen).