Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/10

4. Februar 2010

82) Es sei $V := \{ A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^T = -A \}$ und

$$v_1 := E_{12} - E_{21},\ v_2 := E_{23} - E_{32},\ v_3 := E_{13} - E_{31},$$

(dabei ist E_{ij} die Standard-Matrix in $\mathbb{R}^{3\times 3}$ mit 1 in der i-ten Zeile und j-ten Spalte).
Zeigen Sie: V ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^{3\times 3}$ und (v_1, v_2, v_3) ist eine Basis von V.
Wir betrachten V als euklidischen Raum mit dem (eindeutig bestimmten) Skalarprodukt, bezüglich dem (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis ist. Weiters betrachten wir V als orientierten Vektorraum mit der Orientierung, bezüglich der (v_1, v_2, v_3) positiv orientiert ist.
Zeigen Sie: Für $A, B \in V$ ist $A \times B = AB - BA$.
(Hinweis: Verwenden Sie Satz 214, (3) zur Berechnung von $A \times B$).

83) Wie ist die *Matrix einer linearen Funktion* definiert? Es seien

$$\underline{v} := (v_1, v_2) := ((1,1,-1),(0,2,3)) \in (\mathbb{Q}^3)^2\ ,$$

$$\underline{w} := (w_1, w_2) := ((2,0,-1),(1,1,0)) \in (\mathbb{Q}^3)^2\ ,$$

V bzw. W die von $\underline{v}$ bzw. $\underline{w}$ erzeugten Untervektorräume von $\mathbb{Q}^3$ und $f : V \longrightarrow W$ die lineare Funktion mit
$f(v_1) = w_1 - w_2$ und $f(v_2) = 2w_1 + w_2$. Berechnen Sie die Matrix von f bezüglich der Basen $\underline{v}$ und $\underline{w}$. Zeigen Sie, dass die Funktion f ein Isomorphismus ist und berechnen Sie die Matrix ihrer Umkehrfunktion bezüglich der Basen $\underline{w}$ und $\underline{v}$.

84) Es sei

$$V := \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ z \longmapsto c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 \mid c_0, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\}\,.$$

Dann ist V ein Untervektorraum des Vektorraums aller Polynomfunktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Mit x bezeichnen wir die identische Funktion und mit 1 die Funktion, die alle reellen Zahlen auf 1 abbildet. Zeigen Sie:
$\underline{v} := (1, x, x^2, x^3)$ ist eine Basis von V. Die Funktionen

$$D : V \longrightarrow V,\ \sum_{i=0}^{3} c_i x^i \longmapsto \sum_{i=1}^{3} i c_i x^{i-1}$$

und

$$I : V \longrightarrow V,\ \sum_{i=0}^{3} c_i x^i \longmapsto \sum_{i=0}^{2} \frac{1}{i+1} c_i x^{i+1}$$

sind linear. Berechnen Sie die Matrizen $M(D, \underline{v})$ und $M(I, \underline{v})$ von D und I bezüglich der Basis $\underline{v}$.
Berechnen Sie dann die Matrizen $M(D \circ I, \underline{v})$ und $M(I \circ D, \underline{v})$. Welchen Rang haben diese Matrizen?

E N D E