Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/10

21. Jänner 2010

70) Was ist eine *Eigenbasis* einer Matrix? Berechnen Sie - wenn möglich - eine Eigenbasis der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{11}{2} & 10 \\ \frac{-15}{4} & -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \quad \text{bzw.} \quad B := \begin{pmatrix} -5 & -8 \\ \frac{9}{2} & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}\,.$$

Falls A bzw. B eine Eigenbasis hat, sei $S \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bzw. $T \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die Matrix, deren Spalten die zwei berechneten Eigenbasisvektoren sind. Berechnen Sie dann $S^{-1}AS$ bzw. $T^{-1}BT$.

71) Wie kann man schnell hohe Potenzen einer Matrix berechnen, wenn man eine Eigenbasis von dieser kennt? Berechnen Sie eine Eigenbasis der Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{24} & \frac{5}{12} \end{pmatrix}$$

und dann die zehntausendste Potenz dieser Matrix.

72) Was ist ein *Polynom*? Was ist der *Grad* eines Polynoms? Erläutern Sie den *Divisionsalgorithmus* für Polynome (mit Koeffizienten in einem Körper)? Es seien

$$f := x^6 + x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 1 \quad \text{und} \quad g := 2x^3 - x^2 + 1 \in \mathbb{Q}[x]\,.$$

Berechnen Sie den polynomialen Quotienten von f und g und den Rest von f nach Division durch g (ohne Maple zu verwenden).

73) Was ist eine *Nullstelle* eines Polynoms? Zeigen Sie, dass 2 eine Nullstelle des Polynoms $(-2, -7, 2, 1, 0, 0, \ldots)$ ist und berechnen Sie dann alle Nullstellen dieses Polynoms.

74) Eine quadratische Matrix A heißt *symmetrisch*, wenn $A^T = A$ ist.
Zeigen Sie: Jede symmetrische reelle 2×2-Matrix hat einen reellen Eigenwert. (Hinweis: Berechnen Sie zuerst das charakteristische Polynom der Matrix

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

wobei a, b, c reelle Zahlen sind).
Zeigen Sie: Jede symmetrische reelle 2×2-Matrix hat eine Eigenbasis.

75) Es sei $f := x^5 - 3x^4 + x^3 - 4x^2 + 2$. Dividieren Sie f mit Rest durch $x - 1$, berechnen Sie also ein Polynom m und eine reelle Zahl r mit $f = m.(x-1) + r$. Dividieren Sie dann m mit Rest durch $x - 1$. Führen Sie das solange weiter, bis Sie Zahlen $c_5, c_4, \ldots, c_0$ berechnet haben mit

$$f = c_5.(x-1)^5 + c_4.(x-1)^4 + \ldots + c_0\,.$$

Erläutern Sie den Zusammenhang dieser Aufgabe mit Satz 19 (Darstellung von Zahlen durch Ziffern) im Skriptum und formulieren Sie ein Analogon dieses Satzes für Polynome.