Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/10

14. Jänner 2010

64) Was ist die *Determinante* einer Matrix? Es seien $A \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$ eine Matrix und B die Matrix, die man durch Addition der zweiten Spalte von A zur ersten erhält.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinanten von A und B gleich sind.
Zeigen Sie (durch Ausrechnen), dass die Determinante von $2A$ und das 8-fache der Determinante von A gleich sind.

65) Erläutern Sie das in Satz 204 angegebene Verfahren zur Berechnung von Determinanten. Berechnen Sie die Determinanten der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -7 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 7124 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3145 & 2 & -5 \\ 4 & -9793 & -11 & 1 \end{pmatrix} .$$

Berechnen Sie die Determinanten von $3A$, A^2 und $-2B$.

66) Welche Eigenschaften der Determinante wurden in der Vorlesung besprochen?
Es seien A und B reelle 5×5-Matrizen mit $\det(A) = 4$ und $\det(B) = -2$. Berechnen Sie

$$\det(A^2 \cdot B \cdot B^T), \quad \det(2A \cdot B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A^T)\,,$$
$$\det(-3A) \quad \text{und} \quad \det(-B^2)\,.$$

67) Es sei n eine positive ganze Zahl. Berechnen Sie die Determinante der $n \times n$-Matrix A mit $A_{ij} := (i-1)n + j$, $1 \leq i, j \leq n$. Hinweis: Schreiben Sie diese Matrix für $n = 1, 2, 3, 4, 5$ an!

68) Was ist ein *Eigenwert*, was ist ein *Eigenvektor* einer Matrix? Was ist der *Eigenraum* einer Matrix zum Eigenwert c? Wie kann man die Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix berechnen? Berechnen Sie die reellen Eigenwerte und die entsprechenden Eigenräume der folgenden reellen Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -26 & -150 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}.$$

69) Es sei A eine $n \times n$-Matrix mit Koeffizienten in einem Körper K. Zeigen Sie:
Genau dann ist 0 ein Eigenwert von A, wenn A nicht invertierbar ist. Wenn A invertierbar ist und $c \in K$ ein Eigenwert von A ist, dann ist c^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} und die Eigenräume von A zum Eigenwert c und von A^{-1} zum Eigenwert c^{-1} sind gleich.
Berechnen sie die Eigenwerte und Eigenräume der zu

$$\begin{pmatrix} -26 & -150 \\ 5 & 29 \end{pmatrix}$$

inversen Matrix.

Frohe Weihnachten und alles Gute für das Neue Jahr!