Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/10

10. Dezember 2009

52) Sei V ein Vektorraum. Was ist eine *Translation* in V? Wie sind die Addition und die Skalarmultiplikation im Vektorraum aller Translationen von V definiert? Was ist ein *Pfeil* in V?
Betrachten Sie die Zeichenebene nach Wahl eines Nullpunktes als Vektorraum und wählen Sie eine Basis (P, Q) dieses Vektoraums.
Skizzieren Sie die Graphen der Translationen s und t, die durch $s(Q) = P$ und $t(Q) = -P$ definiert sind, indem Sie einige Elemente der Graphen von s und t in die Ebene zeichnen.
Bilden die Translationen s und t eine Basis des Vektorraums aller Translationen der Ebene? Wenn ja, berechnen Sie die Koordinatenspalte der Translation r, die durch $r(0) = P$ definiert ist, bezüglich dieser Basis.

53) Was ist ein *Skalarprodukt auf einem reellen Vektorraum*? Was ist ein *euklidischer Raum*? Wie ist der *Abstand zwischen zwei Vektoren* in einem Vektorraum mit Skalarprodukt definiert? Wann stehen zwei Vektoren *zueinander senkrecht* oder *orthogonal*?
Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$ mit dem Standardskalarprodukt. Berechnen Sie alle Abstände zwischen je zwei der folgenden Vektoren und überprüfen Sie, welche dieser Vektoren zueinander senkrecht stehen:

$$(3, 4, -3),\ (1, 2, 6),\ (1, 0, 1),\ (4, 1, -1)\,.$$

54) Gibt es ein Skalarprodukt $\langle -, - \rangle$ auf $\mathbb{R}^3$ so, dass dessen Gram'sche Matrix bezüglich der Standardbasis gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist? Wenn ja, berechnen Sie die Abstände zwischen je zwei der Vektoren von Aufgabe 53 bezüglich diesem neuen Skalarprodukt.

55) Was ist eine *Orthonormalbasis*? Wie können die Koordinaten eines Vektors bezüglich einer Orthonormalbasis berechnet werden?
Wir betrachten das Standardskalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 1}$ aller reellen Spalten mit 2 bzw. 3 Zeilen. Zeigen Sie, dass die Spalten der folgenden Matrizen eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2\times 1}$ bzw. $\mathbb{R}^{3\times 1}$ sind:

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & \frac{3\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{5} \\ 2 & 0 & -\sqrt{5} \\ -1 & \frac{6\sqrt{5}}{5} & -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die Koordinaten von

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser Orthonormalbasis.

56) Erläutern Sie das *Schmidt'sche Orthonormalisierungsverfahren* zur Berechnung einer Orthonormalbasis. Berechnen Sie damit Orthonormalbasen des von $(1,-1,2)$ und $(1,2,1)$ bzw. von $(\frac{3}{5},0,\frac{4}{5},0)$, $(1,0,-2,1)$ und $(1,1,1,-1)$ erzeugten Untervektorraums U bzw. V von $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^4$ (mit dem Standardskalarprodukt).

57) Es seien V ein zweidimensionaler euklidischer Raum und a, b, c drei verschiedene Punkte, die nicht alle auf einer Geraden liegen, in V. Zwei Geraden $p + \mathbb{R}v$ und $q + \mathbb{R}w$ *stehen zueinander senkrecht* oder *orthogonal*, wenn v und w zueinander senkrecht stehen. A bzw. B bzw. C sei die Gerade durch a bzw. b bzw. c, die senkrecht zur Geraden durch die anderen zwei Punkte steht. Zeigen Sie: $A \cap B \cap C$ enthält genau einen Punkt.
(„Die Höhenlinien eines Dreieckes schneiden einander in einem Punkt“).