

Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2010/2011

Blatt 4 – Lösungen
23. bis 26. November 2010

(25) Lösung von Aufgabe (25):

Die drei angegebenen Gleichungssysteme sind $Ax = 0$, $Ax = b$ und $Ax = c$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 & -3 & -5 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & -8 \\ 3 & 2 & -8 & -4 & -7 \\ 3 & 3 & -9 & -2 & -3 \end{pmatrix} \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die um die Spalten 0 , b , c erweiterte Koeffizientenmatrix A , also die Matrix

$$(A|0|b|c) = \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c} 2 & 1 & -5 & -3 & -5 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -7 & -5 & -8 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & -8 & -4 & -7 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & -9 & -2 & -3 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

bringt man durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt

$$(A'|0|b'|c') = \left(\begin{array}{ccccc|c|c|c} 1 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right),$$

wobei die Matrix in Stufenform A' und die Spalte c' – unabhängig von den verwendeten Zeilenumformungen – *eindeutig bestimmt* sind, während das für die Spalte b' *nicht* gilt.

Damit ist

$$L(A, 0) = \{r_1 w_1 + r_2 w_2 \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\}$$

$$L(A, b) = \emptyset$$

$$L(A, c) = \{r_1 w_1 + r_2 w_2 + z \mid r_1, r_2 \in \mathbb{Q}\},$$

wobei w_1 , w_2 und z die folgenden Spaltenvektoren sind:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad z = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(26) Lösung von Aufgabe (26) :

Durch elementare Zeilenumformungen verwandelt man die Matrix M in die (durch M eindeutig bestimmte) Matrix in Stufenform

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix M' gelten folgende Aussagen :

- Die Anzahl r der Pivot-Spalten von M' ist 2.
- Die Anzahl s der Nicht-Pivot-Spalten von M' ist 3.
- Die *erste* Spalte M'_{-1} und die *dritte* Spalte M'_{-3} sind die Pivot-Spalten von M' .

Aus diesen Beobachtungen und aus den Elementen in den drei Nicht-Pivot-Spalten M'_{-2} , M'_{-4} , M'_{-5} erhält man die Antworten auf die Fragen (a) bis (d).

ad (a) :

Nach Satz 84(2) der Vorlesung ist das Tripel (w_1, w_2, w_3) mit

$$w_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine \mathbb{Q} -Basis des Lösungsraumes $L(M, 0)$ des homogenen Gleichungssystems $Mx = 0$.

ad (b) :

Nach Satz 104(1) der Vorlesung ist das Paar $(t_1, t_2) = (M_{-1}, M_{-3})$, also das Paar

$$t_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad t_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

eine \mathbb{Q} -Basis des Spaltenraumes $S(M)$ der Matrix M .

Das folgt daraus, daß M'_{-1} und M'_{-3} die Pivot-Spalten der Stufenmatrix M' sind.

ad (c) und (d) :

- $\text{rg}(M) = \dim(S(M)) = r = 2$ gilt nach Definition 101 der Vorlesung.
- $\dim(L(M, 0)) = s = 3$ gilt nach Satz 84(2) der Vorlesung.

Es ist $\dim(L(M, 0)) + \dim(S(M)) = 3 + 2 = 5 = \dim(\mathbb{Q}^{5 \times 1})$.

(27) Lösung von Aufgabe (27) :

Wir verwenden die Bezeichnungen und Resultate aus der Lösung von Aufgabe (26).

ad (a) und (c) :

(w_1, w_2, w_3) ist *keine* \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$, denn wegen $\dim(\mathbb{Q}^{5 \times 1}) = 5$ hat *jede* \mathbb{Q} -Basis des Vektorraumes $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$ genau 5 Elemente.

Hingegen ist (w_1, w_2, w_3) ein *linear unabhängiges* System von Vektoren aus $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$ und die Standard-Basis $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ in $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$ ein *Erzeugendensystem* von $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$.

Nach Satz 94 des Skriptums zur Vorlesung gibt es folglich Indices i und j mit $1 \leq i < j \leq 5$ derart, daß $(w_1, w_2, w_3, e_i, e_j)$ eine \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$ ist. Die Indices i und j mit dieser Eigenschaft sind durch (w_1, w_2, w_3) nicht eindeutig bestimmt, doch erhält man die *kleinsten* derartigen Indices nach Satz 104(2) des Skriptums, indem man die Matrix

$$W = (w_1 | w_2 | w_3 | e_1 | e_2 | e_3 | e_4 | e_5) = \begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix in Stufenform verwandelt. Man erhält die Matrix

$$W' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & -2 \end{pmatrix},$$

deren Pivot-Spalten die Spalten $W'_{-1}, W'_{-2}, W'_{-3}, W'_{-4}, W'_{-6}$ sind.

Daraus folgt, daß $(W'_{-1}, W'_{-2}, W'_{-3}, W'_{-4}, W'_{-6})$ eine \mathbb{Q} -Basis des Spaltenraumes $S(W')$ der Matrix W' und daher $(W_{-1}, W_{-2}, W_{-3}, W_{-4}, W_{-6}) = (w_1, w_2, w_3, e_1, e_3)$ eine \mathbb{Q} -Basis des Spaltenraumes $S(W)$ der Matrix W ist. Es gilt jedoch $S(W) = \mathbb{Q}^{5 \times 1}$.

Also ist

$$(w_1, w_2, w_3, e_1, e_3) = \left(\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$.

Die Koordinatenspalte $x \in \mathbb{Q}^{5 \times 1}$ des Elementes $u \in \mathbb{Q}^{5 \times 1}$ bezüglich der soeben berechneten \mathbb{Q} -Basis $(w_1, w_2, w_3, e_1, e_3)$ von $\mathbb{Q}^{5 \times 1}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $(w_1 | w_2 | w_3 | e_1 | e_3)x = u$, also des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} -4 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix $(w_1 | w_2 | w_3 | e_1 | e_3)$ resp. die Spalte u dieses Gleichungssystems verwandelt man durch *dieselben* elementaren Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{Q}^{5 \times 5}$ resp. die Spalte

$$u' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \\ 22 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Da die linearen Gleichungssysteme $(w_1 | w_2 | w_3 | e_1 | e_3) x = u$ und $Ix = u'$ dieselben Lösungen haben, ist $x = u'$ die Koordinatenspalte von $u \in \mathbb{Q}^{5 \times 1}$ bezüglich der \mathbb{Q} -Basis $(w_1, w_2, w_3, e_1, e_3)$.

ad (b) und (d):

Diese Aufgaben löst man genau so wie die Aufgaben (a) und (c).

Wegen $\dim(\mathbb{Q}^{3 \times 1}) = 3$ ist (t_1, t_2) keine \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}^{3 \times 1}$.

Um (t_1, t_2) zu einer \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}^{3 \times 1}$ zu ergänzen, verwandeln wir die Matrix

$$T = (t_1 | t_2 | e_1 | e_2 | e_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei jetzt (e_1, e_2, e_3) die Standard-Basis in $\mathbb{Q}^{3 \times 1}$ sei, durch elementare Zeilenumformungen in die Stufenmatrix

$$T' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix},$$

deren Pivot-Spalten die Spalten $T'_{-1}, T'_{-2}, T'_{-3}$ sind.

Also ist $(T'_{-1}, T'_{-2}, T'_{-3})$ eine \mathbb{Q} -Basis des Spaltenraumes $S(T')$ von T' und folglich $(T_{-1}, T_{-2}, T_{-3}) = (t_1, t_2, e_1)$ eine \mathbb{Q} -Basis des Spaltenraumes $S(T)$ von T .

Wegen $S(T) = \mathbb{Q}^{3 \times 1}$ ist somit

$$(t_1, t_2, e_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

eine \mathbb{Q} -Basis von $\mathbb{Q}^{3 \times 1}$.

Die Koordinatenspalte $y \in \mathbb{Q}^{3 \times 1}$ des Elementes $v \in \mathbb{Q}^{3 \times 1}$ bezüglich der soeben gefundenen \mathbb{Q} -Basis (t_1, t_2, e_1) von $\mathbb{Q}^{3 \times 1}$ ist die eindeutig bestimmte Lösung des linearen Gleichungssystems $(t_1 | t_2 | e_1) y = v$, also des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Dieses lineare Gleichungssystem läßt sich in üblicher Weise durch elementare Zeilenumformungen in das lineare Gleichungssystem $Iy = v'$ verwandeln, wobei $I \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ die Einheitsmatrix und

$$v' = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ist. Da die Gleichungssysteme $(t_1 | t_2 | e_1) y = v$ und $Iy = v'$ dieselben Lösungen haben, ist $y = v'$ die Koordinatenspalte von $v \in \mathbb{Q}^{3 \times 1}$ bezüglich der \mathbb{Q} -Basis (t_1, t_2, e_1) .

(28) Lösung von Aufgabe (28):

ad (a) und (b):

Die *Zyklenzerlegungen* der angegebenen Permutationen aus S_8 lauten:

$$\begin{aligned} \sigma &= (1\ 2\ 5) \circ (3\ 6) \circ (4\ 7\ 9\ 8) \\ \tau &= (1\ 3\ 4\ 7) \circ (2) \circ (5\ 6\ 9) \circ (8) \\ \sigma \circ \tau &= (1\ 6\ 8\ 4\ 9) \circ (2\ 5\ 3\ 7) \\ \tau \circ \sigma &= (1\ 2\ 6\ 4) \circ (3\ 9\ 8\ 7\ 5) \\ \sigma^{-1} &= (1\ 5\ 2) \circ (3\ 6) \circ (4\ 8\ 9\ 7) \\ \tau^{-1} &= (1\ 7\ 4\ 3) \circ (2) \circ (5\ 9\ 6) \circ (8) \\ (\sigma \circ \tau)^{-1} &= (1\ 9\ 4\ 8\ 6) \circ (2\ 7\ 3\ 5) \\ (\tau \circ \sigma)^{-1} &= (1\ 4\ 6\ 2) \circ (3\ 5\ 7\ 8\ 9). \end{aligned}$$

Bei der Darstellung einer Permutation als Hintereinanderausführung von Zykeln läßt man meistens das Symbol \circ sowie Zykeln der Länge 1 (das heißt Fixpunkte) weg. Man schreibt also beispielsweise $\tau = (1\ 3\ 4\ 7)(5\ 6\ 9)$. Allerdings wird dann nicht mehr deutlich, daß τ eine Permutation der Menge $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ und *nicht* der Menge $\{1, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$ sein soll!

ad (b):

Die *Vorzeichen* der genannten Permutationen sind entsprechend der Definition 121 des Skriptums:

$$\begin{aligned} \text{sign}(\sigma) &= (-1)^{9-3-0} = +1 \\ \text{sign}(\tau) &= (-1)^{9-2-2} = -1 \\ \text{sign}(\sigma \circ \tau) &= (-1)^{9-2-0} = -1 \\ \text{sign}(\tau \circ \sigma) &= (-1)^{9-2-0} = -1 \\ \text{sign}(\sigma^{-1}) &= (-1)^{9-3-0} = +1 \\ \text{sign}(\tau^{-1}) &= (-1)^{9-2-2} = -1 \\ \text{sign}((\sigma \circ \tau)^{-1}) &= (-1)^{9-2-0} = -1 \\ \text{sign}((\tau \circ \sigma)^{-1}) &= (-1)^{9-2-0} = -1. \end{aligned}$$

(29) Lösung von Aufgabe (29):

Die Zyklenzerlegung der Permutation $\rho \in S_5$ lautet $\rho = (1\ 4\ 3)(2\ 5)$.

Es gilt $(1\ 4\ 3) = (1\ 4)(4\ 3) = (1\ 4)(3\ 4)$. Also ist $\rho = (1\ 4)(3\ 4)(2\ 5)$.

Da für je drei paarweise verschiedene Elemente $i, j, k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ die Beziehung $(i\ k) = (i\ j)(j\ k)(i\ j)$ gilt, ist aber auch

$$\begin{aligned} \rho &= (1\ 2)(2\ 4)(1\ 2)(3\ 4)(2\ 5) \text{ und} \\ \rho &= (1\ 3)(3\ 4)(1\ 3)(3\ 4)(2\ 5) \text{ und} \\ \rho &= (1\ 5)(4\ 5)(1\ 5)(3\ 4)(2\ 5) \text{ und} \\ \rho &= (1\ 4)(1\ 3)(1\ 4)(1\ 3)(2\ 5) \text{ und so weiter ...} \end{aligned}$$

(30) Lösung von Aufgabe (30) :

ad (a) :

Die um die Einheitsmatrix $I \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ erweiterte Matrix A , also die Matrix

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 9 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

bringt man durch elementare Zeilenumformungen in die Gestalt

$$(I|A') = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -10/6 & -1/6 & 4/6 \\ 0 & 1 & 0 & 2/6 & 2/6 & -2/6 \\ 0 & 0 & 1 & 4/6 & -1/6 & 0/6 \end{array} \right).$$

Also ist A invertierbar und es ist

$$A^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -10 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \\ 4 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

ad (b) und (c) :

Sind $X \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ und $Y \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ Matrizen mit $XA = B$ und $AY = B$, dann gilt

- $X = XI = X(AA^{-1}) = (XA)A^{-1} = BA^{-1}$
- $Y = IY = (A^{-1}A)Y = A^{-1}(AY) = A^{-1}B$.

Umgekehrt gilt

- $(BA^{-1})A = B(AA^{-1}) = BI = B$
- $A(A^{-1}B) = (AA^{-1})B = IB = B$.

Dabei sei I die Einheitsmatrix aus $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$.

Also gibt es *genau eine* Matrix $X \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ und *genau eine* Matrix $Y \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ mit der Eigenschaft $XA = B$ und $AY = B$, nämlich

- $X = BA^{-1}$
- $Y = A^{-1}B$.

Es gilt

$$X = BA^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -10 & -1 & 4 \\ 4 & 4 & -4 \\ 12 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$
$$Y = A^{-1}B = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -10 & -2 & 12 \\ 2 & 4 & -6 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich insbesondere, daß $X \neq Y$ ist.

Bemerkung:

Aus der Eindeutigkeit der Matrizen X und Y und aus $X \neq Y$ folgt insbesondere, daß es – *obwohl* A invertierbar ist – *keine* Matrix $Z \in \mathbb{Q}^{3 \times 3}$ mit $ZA = B = AZ$ gibt!