Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2010/2011

Blatt 1 – Lösungen
12. bis 15. Oktober 2010

(1) Lösung von Aufgabe (1) :

$A = C = E = \{1, 2, 3\}$
$B = \{1, 2, 3, 4\}$
$D = F = \{1, 3\}$

(2) Lösung von Aufgabe (2) :

Es ist

$A = \emptyset\,,\quad B = \{1, 3\}\,,\quad C = \{1, 2, 3, 4\}\,,\quad D = \{1, 2, 3\}\,,\quad E = \{3, 4\}.$

Daraus folgt

- $A \subseteq B \subseteq D \subseteq C$
- $A \subseteq E \subseteq C\,.$

Um daraus *alle* Teilmengenbeziehungen zwischen A, B, C, D, E abzuleiten, benützt man die Regeln

- $X \subseteq X$
- $X \subseteq Y$ und $Y \subseteq Z \Rightarrow X \subseteq Z$,

die für alle Mengen X, Y, Z gelten.

Es gilt also auch $A \subseteq A$, $B \subseteq B$, $C \subseteq C$, $D \subseteq D$, $E \subseteq E$, $A \subseteq D$, $B \subseteq C$, $A \subseteq C$.

(3) Lösung von Aufgabe (3) :

$A = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
$B = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

Bemerkung:
1 ist *per definitionem* keine Primzahl !

Bei der Darstellung einer Menge *in aufzählender Form* müssen *alle* Elemente dieser Menge angeschrieben werden. Deshalb ist die Darstellung einer *unendlichen* Menge in aufzählender Form nicht möglich.

Die Mengen C und D sind unendlich und können somit nicht in aufzählender Form dargestellt werden.

Bemerkung:
Die Schreibweise $C = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \ldots\}$ ist *keine* Darstellung der Menge C *aller* Primzahlen in aufzählender Form !

(4) Lösung von Aufgabe (4) :

- $A \cap (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cap \{4\} = \{4\}$
- $(A \cap B) \cap C = \{2, 4\} \cap \{3, 4, 8, 9\} = \{4\}$

- $A \cap (B \cup C) = \{1,2,3,4\} \cap \{2,3,4,5,7,8,9\} = \{2,3,4\}$
- $(A \cap B) \cup C = \{2,4\} \cup \{3,4,8,9\} = \{2,3,4,8,9\}$
- $(A \cup B) \setminus C = \{1,2,3,4,5,7\} \setminus \{3,4,8,9\} = \{1,2,5,7\}$
- $A \cup (B \setminus C) = \{1,2,3,4\} \cup \{2,5,7\} = \{1,2,3,4,5,7\}$

(5) Lösung von Aufgabe (5) :

P ist die Menge der $9 \times 21 = 189$ Punkte

$$\begin{array}{ccccccc}
(-4,-10) & (-4,-9) & \dots & (-4,0) & \dots & (-4,+9) & (-4,+10) \\
(-3,-10) & (-3,-9) & \dots & (-3,0) & \dots & (-3,+9) & (-3,+10) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(0,-10) & (0,-9) & \dots & (0,0) & \dots & (0,+9) & (0,+10) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
(+3,-10) & (+3,-9) & \dots & (+3,0) & \dots & (+3,+9) & (+3,+10) \\
(+4,-10) & (+4,-9) & \dots & (+4,0) & \dots & (+4,+9) & (+4,+10)
\end{array}$$

$P \cap \mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{Z} \text{ und } -4 \leq x \leq +4\}$ ist die Menge der 9 Punkte

$$\begin{array}{ccc}
(-4,-9) & (-3,-7) & (-2,-5) \\
(-1,-3) & (0,-1) & (+1,+1) \\
(+2,+3) & (+3,+5) & (+4,+7)
\end{array}$$

Die Darstellung dieser Punkte in einem rechtwinkligen Koordinatensystem ist klar.

Für alle $x \in \mathbb{Z}$ ist $f(x) = 2x-1$ und $g(x) = x^2-(x-1)^2 = x^2-(x^2-2x+1) = 2x-1$. Also ist $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Z}$. Da f und g Funktionen von $\mathbb{Z}$ nach $\mathbb{Z}$ sind, gilt nach Definition der Gleichheit von Funktionen somit $f = g$.

(6) Lösung von Aufgabe (6) :

$+18 = (+7)(+2) + 4$
$+18 = (-7)(-2) + 4$
$-18 = (+7)(-3) + 3$
$-18 = (-7)(+3) + 3$
$+465 = (+11)(+42) + 3$
$+465 = (-11)(-42) + 3$
$-465 = (+11)(-43) + 8$
$-465 = (-11)(+43) + 8$

(7) Lösung von Aufgabe (7) :

$6317 = (1100010101101)_2$, denn es ist

$1 \cdot 2^{12} + 1 \cdot 2^{11} + 1 \cdot 2^7 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^0 =$
$= 4096 + 2048 + 128 + 32 + 8 + 4 + 1 = 6317$

$6317 = (200232)_5$, denn es ist

$2 \cdot 5^5 + 2 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^1 + 2 \cdot 5^0 = 2 \cdot 3125 + 2 \cdot 25 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 1 =$
$= 6250 + 50 + 15 + 2 = 6317$

$6317 = (24263)_7$, denn es ist

$2 \cdot 7^4 + 4 \cdot 7^3 + 2 \cdot 7^2 + 6 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 2 \cdot 2401 + 4 \cdot 343 + 2 \cdot 49 + 6 \cdot 7 + 3 \cdot 1 =$
$= 4802 + 1372 + 98 + 42 + 3 = 6317$

$6317 = (6317)_{10}$ (klar)

$6317 = (37\text{A}5)_{12}$, denn es ist

$3 \cdot 12^3 + 7 \cdot 12^2 + 10 \cdot 12^1 + 5 \cdot 12^0 = 3 \cdot 1728 + 7 \cdot 144 + 10 \cdot 12 + 5 \cdot 1 =$
$= 5184 + 1008 + 120 + 5 = 6317$

$6317 = (18\text{AD})_{16}$, denn es ist

$1 \cdot 16^3 + 8 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 13 \cdot 16^0 = 1 \cdot 4096 + 8 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 13 \cdot 1 =$
$= 4096 + 2048 + 160 + 13 = 6317.$

Dabei sei wie üblich A = 10 und D = 13.

Zwischen den Zifferndarstellungen von 6317 zur Basis 2 und zur Basis 16 besteht ein Zusammenhang:

Einerseits ist $6317 = (1100010101101)_2 = (0001\,1000\,1010\,1101)_2 = (18\text{AD})_{16}$
und andererseits ist
$(0001)_2 = 1 = (1)_{16}$
$(1000)_2 = 8 = (8)_{16}$
$(1010)_2 = 10 = (\text{A})_{16}$
$(1101)_2 = 13 = (\text{D})_{16}$.

(8) Lösung von Aufgabe (8):

Sind a, b, c, d ganze Zahlen mit $b > 0$ und $d > 0$, dann gilt für die rationalen Zahlen a/b und c/d:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc\,.$$

Daraus folgt

$$\frac{5}{11} < \frac{6}{13} < \frac{8}{17} < \frac{11}{23} < \frac{7}{13} < \frac{6}{11}\,,$$

denn es ist
$5 \cdot 13 = 65 < 66 = 11 \cdot 6$,
$6 \cdot 17 = 102 < 104 = 13 \cdot 8$,
$8 \cdot 23 = 184 < 187 = 17 \cdot 11$,
$11 \cdot 13 = 143 < 161 = 23 \cdot 7$,
$7 \cdot 11 = 77 < 78 = 13 \cdot 6$.

(9) Lösung von Aufgabe (9):

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6}$$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7}$$

(10) Lösung von Aufgabe (10):

ad (a):

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k(k+1)}$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right) = \frac{1}{2}\,\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

ad (b):

Nach (a) ist

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right) = 1 - \frac{1}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{5} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{2\cdot 3}\right) + \left(\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{3\cdot 4}\right) + \left(\frac{1}{3\cdot 4}-\frac{1}{4\cdot 5}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{4\cdot 5}-\frac{1}{5\cdot 6}\right) + \left(\frac{1}{5\cdot 6}-\frac{1}{6\cdot 7}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}-\frac{1}{6\cdot 7}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{42}\right).$$

ad (c):

Für ein *beliebiges* $n \geq 1$ (anstatt $n = 5$) gilt:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right) = \frac{1}{4}\,\frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)}.$$

Diese beiden Aussagen können (mit oder ohne Verwendung von (a)) durch Induktion über $n \geq 1$ bewiesen werden.

(11) Lösung von Aufgabe (11):

Es ist $0 + \bar{0} = 0 + 1 = 1$ und $1 + \bar{1} = 1 + 0 = 1$.

Daher gilt für jedes 32-tupel $(a_0, a_1, \ldots, a_{30}, a_{31}) \in \{0,1\}^{32}$ die Beziehung

$a_{31}a_{30}\ldots a_1a_0 + \bar{a}_{31}\bar{a}_{30}\ldots\bar{a}_1\bar{a}_0 =$

$= (a_0 2^0 + a_1 2^1 + \ldots + a_{30} 2^{30} - a_{31} 2^{31}) + (\bar{a}_0 2^0 + \bar{a}_1 2^1 + \ldots + \bar{a}_{30} 2^{30} - \bar{a}_{31} 2^{31}) =$

$= (a_0 + \bar{a}_0)2^0 + (a_1 + \bar{a}_1)2^1 + \ldots + (a_{30} + \bar{a}_{30})2^{30} - (a_{31} + \bar{a}_{31})2^{31} =$

$= (2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{30}) - 2^{31} = (2^{31} - 1) - 2^{31} = -1$.

Dieses Resultat kann man zur Berechnung der Zweierkomplementdarstellung negativer Zahlen verwenden:

Es gilt

$0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000 = 0$
$0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0001 = 1$
$0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,1011 = 11$
$0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,1100 = 12$
$0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,1101 = 13$
$0000\,0000\,0000\,0000\,0001\,1000\,1010\,1100 = 6316$
$0000\,0000\,0000\,0000\,0001\,1000\,1010\,1101 = 6317$
$0111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111 = 2^{31} - 1$.

Daraus folgt

$1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111 = -1$
$1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1110 = -2$
$1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,0100 = -12$
$1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,0011 = -13$
$1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,1111\,0010 = -14$
$1111\,1111\,1111\,1111\,1110\,0111\,0101\,0011 = -6317$
$1111\,1111\,1111\,1111\,1110\,0111\,0101\,0010 = -6318$
$1000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000\,0000 = -2^{31}$.

(12) Lösung von Aufgabe (12):

Die Aussage

$$(*) \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

wird für beliebiges $q \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$ durch Induktion über n für alle $n \geq 0$ gezeigt.

Induktionsanfang:

Die Aussage $(*)$ gilt für $n = 0$:

$$\sum_{k=0}^{0} q^k \;=\; q^0 \;=\; 1 \;=\; \frac{q-1}{q-1} \;=\; \frac{q^1-1}{q-1} \;=\; \frac{q^{0+1}-1}{q-1}\,.$$

Induktionsschluß:

Es sei n eine beliebige Zahl, für welche die Aussage $(*)$ gilt, das heißt es sei

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}\,.$$

Dann ist auch $n+1$ eine Zahl, für welche die Aussage $(*)$ gilt.

Aus der Annahme über die Zahl n folgt nämlich

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^{n} q^k + q^{n+1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + q^{n+1} \\
&= \frac{(q^{n+1}-1) + q^{n+1}(q-1)}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+1}-1+q^{n+2}-q^{n+1}}{q-1} \\
&= \frac{q^{n+2}-1}{q-1}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt:

- Die Aussage $(*)$ gilt für $n = 0$.
- Ist $n \geq 0$ und gilt die Aussage $(*)$ für n, so gilt sie auch für $n+1$.

Also gilt die Aussage $(*)$ für *alle* natürlichen Zahlen $n \geq 0$.

Für $q = 2$ lautet die Aussage $(*)$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1 \quad \text{für alle } n \geq 0\,.$$

Diese Aussage haben wir in Aufgabe (11) für $n = 30$ verwendet.