

Proseminar Einführung in die Mathematik 1
WS 2010/11
18. November 2010

- 37) Was ist die *Dimension* eines Vektorraums? Was ist der *Rang* einer Matrix? Wie berechnet man damit die Dimension des Lösungsraums des entsprechenden homogenen Systems linearer Gleichungen? Berechnen Sie den Rang der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und die Dimension des Lösungsraums des durch diese Matrix gegebenen homogenen Systems linearer Gleichungen. Berechnen Sie eine Basis dieses Vektorraums.

- 38) Was ist die *Koordinatenspalte* eines Vektors bezüglich einer Basis?

Zeigen Sie, dass $((1, 2), (3, 4))$ eine Basis von \mathbb{Q}^2 ist. Berechnen Sie die Koordinatenspalten von $(1, 0)$, $(0, 3)$, und von $(2, 3)$ bezüglich dieser Basis.

Zeigen Sie, dass

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine Basis von $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ ist. Berechnen Sie die Koordinatenspalten der vier Standardmatrizen von $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ bezüglich dieser Basis.

- 39) Es sei V ein n -dimensionaler Vektorraum, (v_1, \dots, v_k) ein k -Tupel von Vektoren in V . Ergänzen Sie den folgenden Satz: Wenn (v_1, \dots, v_k) ein Erzeugendensystem bzw. linear unabhängig bzw. eine Basis ist, dann muss $k \dots$ bzw. $k \dots$ bzw. $k \dots$ sein.

Verwenden Sie Satz 104 zur Beantwortung der folgenden Fragen:

Welche der folgenden k -Tupel ($k = 5$ bzw. 3 bzw. 2 bzw. 3) sind Basen von \mathbb{Q}^3 , welche sind linear unabhängig, welche sind ein Erzeugendensystem von \mathbb{Q}^3 ?

Wählen Sie aus den Erzeugendensystemen eine Basis aus und ergänzen Sie die linear unabhängigen k -Tupel zu einer Basis!

$$((4, 8, 12), (-3, -6, -9), (1, 3, 1), (-1, 2, 4), (3, 4, 3))$$

$$((1, 2, 3), (3, -1, 1), (1, -2, 0))$$

$$((-2, 1, 2), (3, -1, 2))$$

$$((3, 1, -1), (2, -1, 1), (-3, 4, -4))$$