Praktikum
Einführung in die Mathematik 1
WS 2009/2010

Blatt 7

2. bis 4. Februar 2010

(44) V sei ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit einem Skalarprodukt $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle$.

Es seien

- $(a_1, \ldots, a_n)$ eine beliebige $\mathbb{R}$-Basis von V
- $(u_1, \ldots, u_n)$ die *orthogonale* (nicht notwendig *orthonormale*) $\mathbb{R}$-Basis von V, die entsprechend dem Schmidt-Algorithmus definiert ist durch

$$u_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle u_i, a_k \rangle}{\langle u_i, u_i \rangle} u_i \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n\,.$$

(a) Bestimmen Sie die Transformationsmatrix T von $(u_1, \ldots, u_n)$ nach $(a_1, \ldots, a_n)$, also die Matrix $T = (T_{ik})_{1 \leq i, k \leq n} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit

$$a_k = \sum_{i=1}^{n} T_{ik}\, u_i \quad \text{für} \quad 1 \leq k \leq n\,.$$

(b) Zeigen Sie, daß die $\mathbb{R}$-Basen $(a_1, \ldots, a_n)$ und $(u_1, \ldots, u_n)$ von V *gleich orientiert* sind.

(45) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ sei versehen mit dem Standard-Skalarprodukt $(x, y) \mapsto \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$.

(a) Zeigen Sie, daß

$$(a_1, a_2, a_3) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

eine *positiv orientierte* $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ ist.

(b) Finden Sie mit Hilfe des Schmidt-Algorithmus eine $\mathbb{R}$-Basis (u_1, u_2, u_3) von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ mit den Eigenschaften

- $\mathbb{R}\, a_1 = \mathbb{R}\, u_1$
- $\mathbb{R}\, a_1 + \mathbb{R}\, a_2 = \mathbb{R}\, u_1 + \mathbb{R}\, u_2$
- (u_1, u_2, u_3) ist *orthogonal* und *positiv orientiert*.

(c) Verwandeln Sie in üblicher Weise die *orthogonale* $\mathbb{R}$-Basis (u_1, u_2, u_3) von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$ in eine *orthonormale* $\mathbb{R}$-Basis (v_1, v_2, v_3) von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

(d) Finden Sie

- eine orthonormale $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}$-Unterraumes $U := \mathbb{R}\, a_1 + \mathbb{R}\, a_2$ von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$
- eine orthonormale $\mathbb{R}$-Basis des $\mathbb{R}$-Unterraumes $V := U^{\perp}$ von $\mathbb{R}^{3 \times 1}$.

Welche *geometrischen* Gebilde sind U und V?

(e) Berechnen Sie

- den Fußpunkt $p_U(x)$ des Lotes von $x = (0,0,2)^{\mathrm{T}}$ auf U
- den Fußpunkt $p_V(x)$ des Lotes von $x = (0,0,2)^{\mathrm{T}}$ auf $V = U^{\perp}$
- den Punkt $p_U(x) + p_V(x)$.

(f) Zeigen Sie

- $u_1 \times u_2 = \alpha\, u_3$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\alpha > 0$
- $v_1 \times v_2 = v_3$
- $x \times u_3 = \xi_1\, a_1 + \xi_2\, a_2 = \eta_1\, u_1 + \eta_2\, u_2 \in U$ mit $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in \mathbb{R}$.

Kann man die Aussage $x \times u_3 \in U$ *beweisen*, ohne $x \times u_3$ zu *berechnen*?

(g) Berechnen Sie das Volumen $\operatorname{vol}(\mathrm{P}(a_1, a_2, a_3))$ des von den drei Vektoren $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ erzeugten Parallelotops $\mathrm{P}(a_1, a_2, a_3) \subseteq \mathbb{R}^{3\times 1}$

- nach Definition 210 des Skriptums
- nach Satz 211 des Skriptums.

Welches *geometrische* Gebilde ist $\mathrm{P}(a_1, a_2, a_3)$?