



die.hak **Innsbruck** die.has

Markus Paul (BHAK Innsbruck):  
Berufsbild Mathematiklehrer/in  
an Handelsakademien

Institut für Mathematik, 18.11.2015

### Programm

I. Teil:

- ▶ Schultyp Handelsakademie
- ▶ Mathematik an Handelsakademien (Stundentafel, Lehrplan)
- ▶ Technologieeinsatz (GTR, EXCEL, CAS)
- ▶ Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik:
  - Matrizenrechnung
  - Effektivverzinsung
  - Kostentheorie

2. Teil:

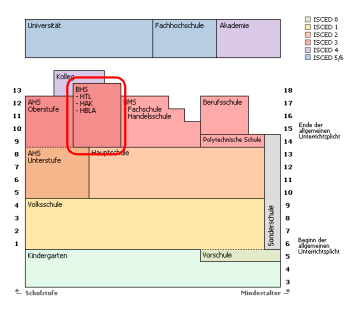
- ▶ standardisierte schriftliche Reife- und Diplomprüfung (Zentralmatura), kompetenzorientierter Unterricht

### Prof. Mag. Dr. Markus Paul

- ▶ Matura am BG u. BRG Bludenz
- ▶ Lehramtsstudium Mathematik und Germanistik an der Uni Innsbruck
- ▶ Doktoratsstudium Germanistik
- ▶ Unterrichtstätigkeit an Handelsakademien: BHAK Schwaz, seit 2010 BHAK Innsbruck nur Mathematik
- ▶ Mitautor des Schulbuchs Tinhof u.a.: Mathematik für HAK. Trauner Verlag, Linz
- ▶ ARGE-Leiter für Mathematik an HAK Tirols
- ▶ Item-Writer für schriftliche Reife- und Diplomprüfung

▶ Markus Paul Mathematik an Handelsakademien

### HAK im österreichischen Schulsystem



Das Diagramm zeigt die verschiedenen Schulstufen im österreichischen Schulsystem, von Kindergarten bis zur Universität. Die HAK-Typen sind farblich markiert: Universitar (blau), Fachhochschule (lila) und Akademie (rosa). Die HAK-Typen sind: BHS (bis HTL, HTL, HTBLA), BMS (BMS Fachschule, Handelschule), Berufsschule, Polytechnische Schule, Hauptschule, Volksschule, Kindergärten, Vorschule, Berufsschule, Fachhochschule, Akademie, Universität.

▶ Markus Paul Mathematik an Handelsakademien

### Schultyp Handelsakademie

- ▶ berufsbildende fünfjährige höhere Schule
- ▶ Schwerpunkt auf kaufmännischer und betriebswirtschaftlicher Ausbildung (Fächer Rechnungswesen und Betriebswirtschaftslehre)
- ▶ Zwei (bis drei) Fremdsprachen
- ▶ Abschluss mit Reife- **und** Diplomprüfung
- ▶ Studienberechtigung **und** Berufsberechtigungen (Bürokaufmann, Großhandelskaufmann)

▶ Markus Paul Mathematik an Handelsakademien

### Schultyp Handelsakademie

Bestandene Reifeprüfungen in Österreich 2010 nach Schultypen (Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2013):

Schultyp	Anzahl	Prozent
AHS		
BHS		
Summe:	42.393	100%

▶ Markus Paul Mathematik an Handelsakademien

### Schultyp Handelsakademie

Bestandene Reifeprüfungen in Österreich 2010 nach Schultypen (Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2013):

Schultyp	Anzahl	Prozent
AHS	18.566	44 %
BHS	23.827	56 %
Summe:	42.393	100 %

### Schultyp Handelsakademie

Bestandene Reifeprüfungen in Österreich 2010 nach Schultypen (Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2013):

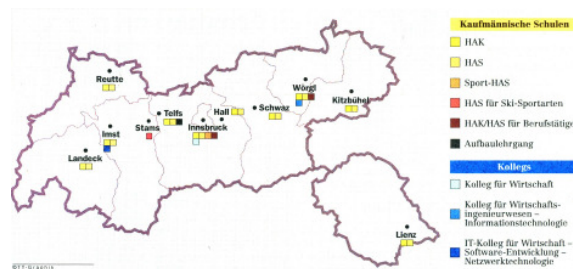
Schultyp	Anzahl	Prozent
AHS	18.566	44 %
HTL		
HAK		
HUM		
LW		
BAKIP		
Summe:	42.393	100 %

### Schultyp Handelsakademie

Bestandene Reifeprüfungen in Österreich 2010 nach Schultypen (Statistik Austria, Statistisches Jahrbuch 2013):

Schultyp	Anzahl	Prozent
AHS	18.566	44 %
HTL	9.904	23 %
HAK	6.379	15 %
HUM	4.936	12 %
LW	722	2 %
BAKIP	1.886	4 %
Summe:	42.393	100 %

### Handelsakademien in Tirol



### Mathematik an Handelsakademien

Lehrplan HAK 2014: Studentafel: II h Mathematik

A. Pflichtgegenstände, Vertiefende Cheminie	Wochenstunden					Lehr- mit- tel Stunde
	I	II	III	IV	V	
A.1. <b>Stammfächer</b>						
A.1.1. <b>Verständnis und Bildungsinhalte</b>	2	2	2	2	2	23
11. Religion	2	2	2	2	2	10
12. Persönlichkeitsbildung und soziale Kompetenz	2	2	2	2	2	10
13. Roman, Belletristik	2	2	2	2	2	10
14. Biologie und Sport	2	2	2	2	2	10
A.2. <b>Sprachen und Kommunikation</b>						
21. Deutsch	3	3	3	3	3	14
22. Englisch zweisprachlich	3	3	3	3	3	14
23. <b>Lehrfach Fremdsprache</b>	2	2	2	2	2	12
A.3. <b>Karrierefächer – Wirtschaft und Management</b>						
31. Betriebswirtschaft	3	3	3	3	3	14
32. Unternehmensethik	3	3	3	3	3	14
33. Personalmanagement	3	3	3	3	3	14
34. Business Training	3	3	3	3	3	14
35. Wirtschaftsinformatik	2	2	2	2	2	8
36. English Management and International Business	2	2	2	2	2	8
37. English	2	2	2	2	2	8
38. Unternehmensethik	2	2	2	2	2	8
39. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
40. <b>Kreativität und Kultur</b>						
41. Politische Bildung und Geschichte	1	1	1	1	1	4
42. Geschichte und Sozialkunde	1	1	1	1	1	4
43. Persönliche Wirtschafts- und Kulturkunde	1	1	1	1	1	4
44. <b>Wirtschafts- und Kulturkunde</b>						
45. Wirtschaftsinformatik	2	2	2	2	2	8
46. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
47. <b>Wirtschaftsinformatik</b>						
48. Wirtschaftsinformatik	2	2	2	2	2	8
49. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
50. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
51. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
52. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
53. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
54. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
55. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
56. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
57. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
58. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
59. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
60. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
61. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
62. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
63. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
64. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
65. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
66. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
67. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
68. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
69. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
70. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
71. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
72. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
73. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
74. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
75. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
76. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
77. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
78. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
79. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
80. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
81. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
82. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
83. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
84. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
85. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
86. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
87. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
88. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
89. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
90. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
91. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
92. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
93. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
94. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
95. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
96. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
97. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8
98. <b>Technische, Ökologische und Wirtschaftliche</b>						
99. Technische, Ökologische und Wirtschaftliche	2	2	2	2	2	8
100. Betriebswirtschaft	2	2	2	2	2	8

### Mathematik an Handelsakademien

Lehrplan Mathematik 2014

2. Jahrgang: Matrizenrechnung

Bereich Algebra und Geometrie – Matrizen

- die Matrixschreibweise als Darstellungsform nennen, die Matrixelemente interpretieren und deuten.
- lineare Gleichungssysteme in Matrixschreibweise darstellen, mit Hilfe der Matrizenrechnung umformen und technologieunterstützt lösen.
- Addition, Subtraktion, Multiplikation sowie die Berechnung der Inversen von Matrizen mit Hilfe der Technologie durchführen.
- die Matrizenrechnung auf wirtschaftliche Aufgabenstellungen anwenden und Gozintographen deuten.

3. Jahrgang: Finanzmathematik

Bereich Funktionale Zusammenhänge – Rentenrechnung und Schuldtilgung

- den Zusammenhang zwischen geometrischen Reihen und der Rentenrechnung beschreiben.
- die charakteristischen Größen der Rentenrechnung berechnen, interpretieren und im Kontext deuten.
- den Begriff des Effektivzinssatzes erklären, mittels Technologie berechnen und das Ergebnis interpretieren.

## Mathematik an Handelsakademien

### Lehrplan Mathematik 2014

#### 4. Jahrgang: Kosten- und Preistheorie

##### Bereich Analysis – Kosten- und Preistheorie

- Nachfrage- und Angebotsfunktionen bestimmen, deren Eigenschaften erklären und markante Punkte (Mindestpreis, Höchstpreis, Sättigungsmenge, Marktgleichgewicht) ermitteln, grafisch darstellen und interpretieren.
- die Begriffe der (Punkt-)Elastizität und Bogenelastizität im wirtschaftlichen Kontext erklären.
- Elastizitäten berechnen und die Ergebnisse interpretieren.
- den Begriff und die Eigenschaften der ertragsgesetzlichen Kostenfunktion beschreiben und diese als Polynomfunktion 3. Grades berechnen.
- die typischen Kostenverläufe (degressiv, progressiv) beschreiben und interpretieren.
- typische Begriffe der Kosten- und Preistheorie (insbesondere Kostenkurve, Betriebsoptimum, langfristige Preisuntergrenze, Betriebsminimum, kurzfristige Preisuntergrenze, Break Even Point, Gewinnzone, Cournot'scher Punkt, Deckungsbeitrag, Erlösmaximum) berechnen und interpretieren.
- den Begriff der Grenzfunktion beschreiben, diese im wirtschaftlichen Kontext erklären und anwenden.

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

## Technologieeinsatz

### Lehrplan Mathematik 2014

#### Didaktische Grundsätze:

Zur Bearbeitung von Aufgabenstellungen sollen zeitgemäße Technologien eingesetzt werden. Dabei sollen die Schülerinnen und Schüler die Technologien sowohl als Rechenwerkzeuge als auch als didaktisches Medium für die Erarbeitung von Lerninhalten kennenlernen.

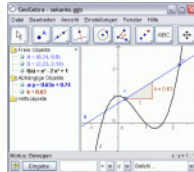
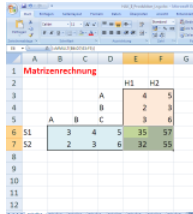
Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

## Technologien

Grafischer Taschenrechner: Tabellenkalkulation:  
TI-82Stats, TI-84plus EXCEL

Computeralgebrasystem:  
GeoGebra



Mindeststandard für Zentralmatura BHS

Einsatz im MM-Unterricht vom Ministerium erwünscht

ab 4.0 mit Tabellenkalkulation und CAS

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

## Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

### Matrizenrechnung

(aus: Tinhof u.a.: HAK II. Trauner Verlag)

Ein Produktionsbetrieb erzeugt in den Hallen  $H_1$  und  $H_2$  in zwei Schichten  $S_1$  und  $S_2$  die Produkte A, B und C. Die Produktionshöhe in beiden Hallen je Schicht und die Produktionskosten in den zwei Schichten sind den folgenden Tabellen zu entnehmen:

Kosten in beiden Schichten je ME in GE:

	A	B	C
$S_1$	3	4	5
$S_2$	2	3	6

Produktion in beiden Hallen je Schicht in ME:

	$H_1$	$H_2$
A	4	5
B	2	3
C	3	6

Es sollen die Produktionskosten je Schicht für die beiden Hallen ermittelt werden.

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

## Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

### Lösung Matrizenrechnung

Zur Lösung der Aufgabe ist also die Kostenmatrix  $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$  mit der Produktionsmatrix  $\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$  zu multiplizieren.

Mit dem Schema von Falk ergibt sich:

			$H_1$	$H_2$
	A	B	4	5
		B	2	3
	A	B	C	3
$S_1$	3	4	5	35
$S_2$	2	3	6	32
			32	55

Die Produktionskosten betragen in der Halle 1 in der Schicht  $S_1$  35 GE und in der Schicht  $S_2$  32 GE.

Die Produktionskosten betragen in der Halle 2 in der Schicht  $S_1$  57 GE und in der Schicht  $S_2$  55 GE.

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

## Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

### Lösung Matrizenrechnung mit EXCEL:

E6	fx (=MMULT(B6:D7;E3:F5))						
1	A	B	C	D	E	F	G
2	Matrizenrechnung				$H_1$	$H_2$	
3				A	4	5	
4				B	2	3	
5		A	B	C	3	6	
6	$S_1$	3	4	5	35	57	
7	$S_2$	2	3	6	32	55	
8							

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

### Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

#### Finanzmathematik: Leasing (aus: Tinhof u.a.: HAK III. Trauner Verlag)

Leasingangebot für ein Mittelklasseauto mit Kaufpreis € 21.790,00:

Kassapreis	€ 21.790,00	
Anzahlung	€ 2.148,00	bei Vertragsabschluss zu zahlen
Restwert	€ 5.980,00	gleichzeitig mit der letzten Rate zu zahlen
60 nachschüssige Monatsraten $\dot{a}$	€ 369,00	erstmal einen Monat nach Vertragsabschluss

#### Welche Effektivverzinsung hat dieses Leasingangebot?



Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

### Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

#### Lösung Finanzmathematik

Leasingangebot für ein Mittelklasseauto mit Kaufpreis € 21.790,00:

Kassapreis	€ 21.790,00	
Anzahlung	€ 2.148,00	bei Vertragsabschluss zu zahlen
Restwert	€ 5.980,00	gleichzeitig mit der letzten Rate zu zahlen
60 nachschüssige Monatsraten $\dot{a}$	€ 369,00	erstmal einen Monat nach Vertragsabschluss

Wir berechnen die Effektivverzinsung:

Zahlungsstrom

Aquivalenzgleichung:

$$21\,790 - 2\,148 - 369 \cdot (1+i)^{-1} + \dots + 369 \cdot (1+i)^{-59} + 5\,980 \cdot (1+i)^{-60}$$

$$19\,642 \cdot \frac{i}{(1+i)^60} + 5\,980 \cdot (1+i)^{-60}$$

Wir erhalten die Lösung mit Technologiesatz:  $i = 0,1318$

Der Effektivzinssatz ist ca. 13,18 %.

oder:  $19642 = \sum_{t=1}^{60} (369 \cdot (1+i)^{-t}) + 5980 \cdot (1+i)^{-60}, i = 0,131798$

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

### Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

#### Lösung Finanzmathematik mit EXCEL:

	A	B	C	D	E
1	Leasing	Effektivverzinsung			
2		mit Funktion ZINS:			
3	ZZR =	800			
4	RMZ =	369			
5	BW =	-19642			
6	ZW =	5980			
7	Zins =	13,1798%	=ZINS(B3:B4;B5;B6)		
8	i =	13,1798%	=(1+B7)^12-1		
9					
10					
11					
12					
13					
14	i in Monaten	Rt in Euro	Rt*(1+i)^0,12		
15	0	-19642	-19642,00	=B15*(1+B\$11)^(A15/12)	
16	1	369	365,21		
17	2	369	361,46		
18	3	369	357,75		
19	4	369	354,08		
20	5	369	350,45		

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

### Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

#### Lösung Finanzmathematik mit GTR:

Solver:

EQUATION SOLVER

Equation:  $-19642 + 369 * (1+i)^{-1} + \dots + 369 * (1+i)^{-59} + 5980 * (1+i)^{-60} = 0$

bound:  $i < 1e99.1$

R^12-1

.1317975724

---

TVM-Solver:

N=60

I=13,17975724

PV=-19642

PMT=369

FV=5980

P/Y=12

C/Y=1

PMT: BEGIN

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

### Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

#### Kostentheorie (aus: Tinhof u.a.: HAK IV. Trauner Verlag)

Die Kosten eines Monopolbetriebs zeigen einen s-förmigen Verlauf und lassen sich annähernd durch die kubische Polynomfunktion mit  $K(x) = 0,01x^3 - 0,75x^2 + 50x + 1500$  beschreiben.

- Ermitteln Sie die Kostenkehre und die Grenzkosten in der Kostenkehre.
- Ermitteln Sie das Betriebsoptimum und zeigen Sie, dass im Betriebsoptimum die Stückkosten gleich den Grenzkosten sind.

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

### Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

#### Lösung Kostentheorie

b)  $K(x) = 0,01x^3 - 0,75x^2 + 50x + 1500$  Kosten

$K'(x) = 0,03x^2 - 1,5x + 50$  Grenzkosten

$k(x) = \frac{K(x)}{x} = 0,01x^2 - 0,75x + 50 + \frac{1500}{x}$  Durchschnittskosten, Stückkosten

$k'(x) = 0,02x - 0,75 - \frac{1500}{x^2}$  Grenzüstückkosten

Betriebsoptimum (Minimum der Stückkosten): Setze  $k' = 0$

$$0 = 0,02x - 0,75 - \frac{1500}{x^2}$$

$$0 = 0,02x^3 - 0,75x^2 - 1500$$

mit Technologiesatz:

$x = 59,03$

Bei einer Produktion von 59,03 ME sind die Stückkosten minimal.

$k(59,03) = 65,98$

Die minimalen Stückkosten betragen 65,98 GE/ME.

$K'(59,03) = 65,98$

Die Grenzkosten betragen im Betriebsoptimum 65,98 GE/ME

Markus Paul

Mathematik an Handelsakademien

## Schwerpunkt Wirtschaftsmathematik

### ► Lösung Kostentheorie mit GeoGebra

