Markus Paul, BHAK Innsbruck: Wozu Zentralmatura in Mathematik?

Ringvorlesung Berufsbild Mathematik-LehrerIn
Institut für Mathematik, 12.10.2016

Problemstellung: Matura Status quo

Beispiel 1. Eine Blumenschale, die 12 cm hoch ist, wird außen von einem (halben) Drehhyperboloid und innen von einem Drehparapoloid begrenzt. Die äußeren Abmessungen der Schale betragen: Grundkreisradius 12 cm, oberer äußerer Radius $12 \cdot \sqrt{2}$ cm. Die Gleichung der Parabel, die durch Drehung das Paraboloid erzeugt, lautet $y = 1/20 \cdot x^2 + 2$.

- In die Schale werden 1,5 Liter Wasser gegossen. Wie hoch steht das Wasser in der Schale?
- Soll man diese mit 1,5 Liter Wasser gefüllte Glasschale auf ein Wandbord stellen, das mit maximal 11 kg belastet werden darf? (Dichte von Glas: 2,5 kg/dm^3)

Aus: Werner Peschek: Zentralmatura Mathematik. Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen für alle. In: Internationale Mathematische Nachrichten Nr. 216, April 2011.

Die Realität: Aufnahmeprüfung FH

- Aufgabe 1:
  a) Multiplizieren Sie aus und vereinfachen Sie:
  $$\left(x-\sqrt{x}\right)\cdot\left(x+\sqrt{x}\right)=$$
  b) Im Jahr 2003 betrug die Staatsverschuldung Österreichs 145 Mrd Euro bei einer Bevölkerungszahl von 8 Mio. Wie hoch war die Pro-Kopf-Verschuldung in Euro in diesem Jahr?
- Schätzen Sie wie viel Prozent der Aufnahmebewerber Aufgabe 1 richtig beantwortet haben.
- **28,6 Prozent (73 von 255) erreichten 10 von 10 Punkten**

Die Realität: Aufnahmeprüfung FH

- Aufgabe 1: Kommentare und Lösungen

- *Die Pro-Kopf-Verschuldung beträgt 0,000055 Euro.*

- *Ich kann diese Aufgabe nicht lösen, weil mein Taschenrechner die Zahl 145 Mrd nicht schreiben kann.*

Problemstellung: Kommentare

- „Za wos brauch i dös ?“
- „In Mathe war ich immer schlecht ...“
- „Ich habe nie verstanden, worum es in der Differenzialrechnung gegangen ist...
  .... und habe die Mathe-Matura trotzdem geschafft.“
- „Herr Professor, sagen Sie uns, was wir auswendig lernen sollen und wir machen das.“
- Heinrich Winter: „Ausgerechnet Mathematik als Musterfall absoluter Klarheit wird verbreitet als Musterfall besonderer Unverständlichkeit empfunden.“
  (Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik Nr. 61, 3746, 1996)

Problemstellung: Kommentare

Klaus Hurrelmann: „Die Jugendlichen betrachten die Schulzeit im Wesentlichen als eine unvermeidliche Durchgangsphase im Lebenslauf, die noch nicht zum 'eigentlichen' Leben dazugehört, sondern Voraussetzung für den Eintritt in 'das Leben' ist.
Eine solche Deutung der eigenen Situation muss von sensiblen Jugendlichen zwangsläufig als unzureichend und subjektiv unbefriedigend empfunden werden."
(zit. in: Vollstedt, Maike: Sinnkonstruktion und Mathematik-lernen in Deutschland und Hongkong. Vieweg u. Teubner: Wiesbaden 2011. S.2)

- **Ziel: Begründungskultur**
  (Unterrichtsministerin Claudia Schmidt)

Wozu Zentralmatura ?

- Zentrale Kritik von Prof. Werner Peschek, Uni Klagenfurt, an der traditionellen Mathematikmatura:
  „Die österreichischen Schülerinnen und Schüler bewältigen bei der schriftlichen Reifeprüfung mit Bravour relativ komplexe (vorwiegend operative) Aufgaben, zu deren Lösung grundlegende mathematische Kenntnisse und Fähigkeiten erforderlich sind, über die sie in der Regel nicht (ausreichend) verfügen.“

Aus: Werner Peschek: Zentralmatura Mathematik. Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen für alle. In: Internationale Mathematische Nachrichten Nr. 216, April 2011.

Wozu Zentralmatura ?

- Dieser Befund erklärt zwei geläufige Beobachtungen:
- 1. Vor der Mathematikmatura sind längere zielgerichtete Übungsphasen unerlässlich. Teaching to the Test, „Dressur des Unverstandenen“(M. Wagenschein), „rezeptartige Reproduktion“, „Dominanz des Operativen“, „Pervertierung des Problemlöseanspruchs“
- 2. Eine in Klasse A erfolgreich bewältigte Maturaaufgabe kann man in keiner anderen österreichischen Klasse zur Matura geben, ohne dort eine Katastrophe auszulösen.

Aus: Werner Peschek: Zentralmatura Mathematik. Sicherung von mathematischen Grundkompetenzen für alle. In: Internationale Mathematische Nachrichten Nr. 216, April 2011.

Kompetenzorientierter Unterricht

- Reaktion in Deutschland auf die Ergebnisse der TIMS-Studie 1997 und der PISA-Studie 2001.
- Bildungspolitiker sind nach dem PISA-Schock über Landes- und Parteigrenzen hinweg zu Reformen bereit.
- Seit 2000 in Deutschland erstmals **empirische Sozialforschung** im Bereich der Bildung.

  Andreas Helmke: MARKUS-Studie (**Ma**thematik-Gesamterhebung **R**heinland-Pfalz: **K**ompetenzen, **U**nterrichtsmerkmale, **S**chulkontext)
  1999 bis 2002, 37797 Schüler/innen aus 1838 Klassen
- Ziel: **verständnisorientierter** und **problembezogener** Unterricht.
- Paradigmenwechsel: von der Inputorientierung der Lehrpläne zur Outputorientierung der Bildungsstandards, Kompetenzen formulieren und einfordern.

Kompetenzbegriff (nach Franz Weinert)

- Unter **Kompetenzen** werden längerfristig verfügbare kognitive Fähigkeiten und Fertigkeiten verstanden, die von Lernenden entwickelt werden können und sie befähigen, bestimmte Tätigkeiten **in unterschiedlichen Situationen** auszuüben.
- Konsequenz für Aufgabenstellungen:
  $\Rightarrow$ von **konkreten Problemstellungen** ausgehen,
  $\Rightarrow$ in **verschiedene Kontexte** einbinden
  (Alltag, Wirtschaft, Biologie, Physik, Sport, ...)

Kompetenzorientierter Unterricht

Einführung Differenzialrechnung

- früher hab ich das so gemacht:

Beispiel 5.1: Mittlere Änderungsrate in einem Intervall

Wir berechnen die **mittlere Änderungsrate** der Funktion f mit $y = f(x) = \frac{x^2}{4}$ im Intervall [2; 6] und zeichnen den Grafen von f und die Sekante für dieses Intervall.

x	0	1	2	3	4	5	6
y	0	0,25	1	2,25	4	6,25	9

$f(2) = 1$
$f(6) = 9$

Änderung des x-Werts: $\Delta x = 6 - 2 = 4$

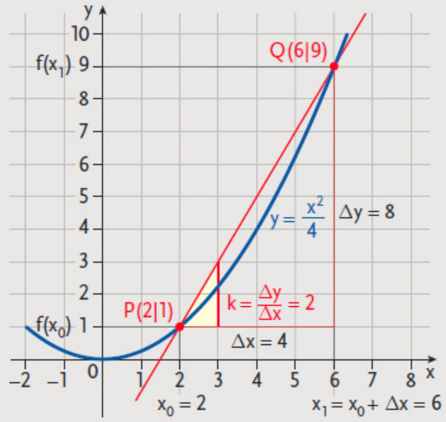
Änderung des Funktionswerts: $\Delta y = f(6) - f(2) = 9 - 1 = 8$

Mittlere Änderungsrate im Intervall [2; 6]:

$$k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{8}{4} = 2$$

Dieser Wert k = 2 ist die Steigung der Sekante durch die beiden Punkte P(2|1) und Q(6|9).

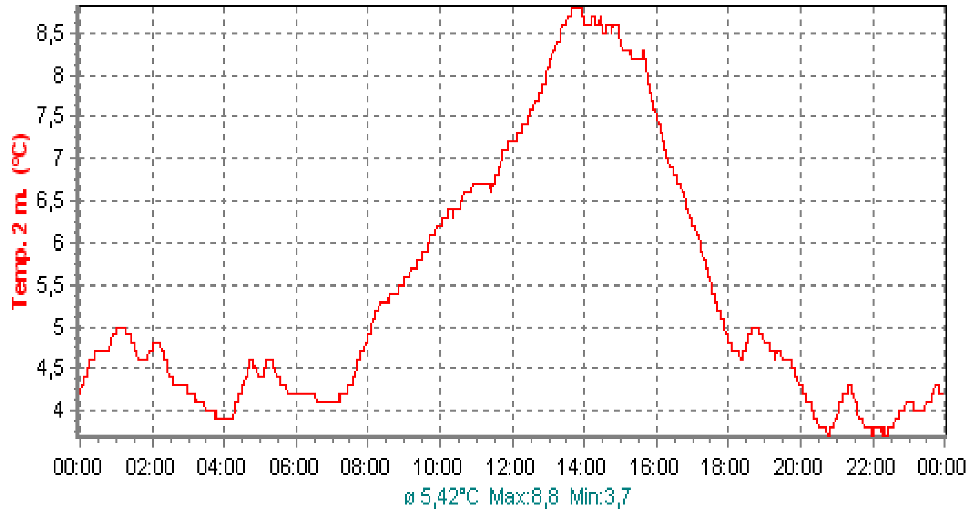
seco: lateinisch für schneiden



Kompetenzorientierter Unterricht

Einführung Differenzialrechnung

- heute mach ich es so:
  Das Diagramm zeigt die Temperatur T in °C in Abhängigkeit von der Uhrzeit an einem Novembertag. (http://www.heimbach-eifel-wetter.de/heute/heute.php)



a) Lies aus dem Diagramm die Temperatur ab für die Zeitpunkte t = 4, 8, 12, 16, 18 in Stunden (h) ab 00:00.
b) Berechne die mittlere Änderungsrate der Temperatur in °C pro h für die Zeit-intervalle [4; 8], [8; 12]; [12; 16] und [16; 18].
Interpretiere jeweils das Vorzeichen. (0,25 °C/h; 0,575 °C/h; 0,075 °C/h; –1,3 °C/h)
c) Für welches dieser Zeitintervalle ist die mittlere Änderungsrate wenig aussagekräftig?
d) In welchem Zeitintervall ändert sich die Temperatur am stärksten?

Kompetenzorientierter Unterricht

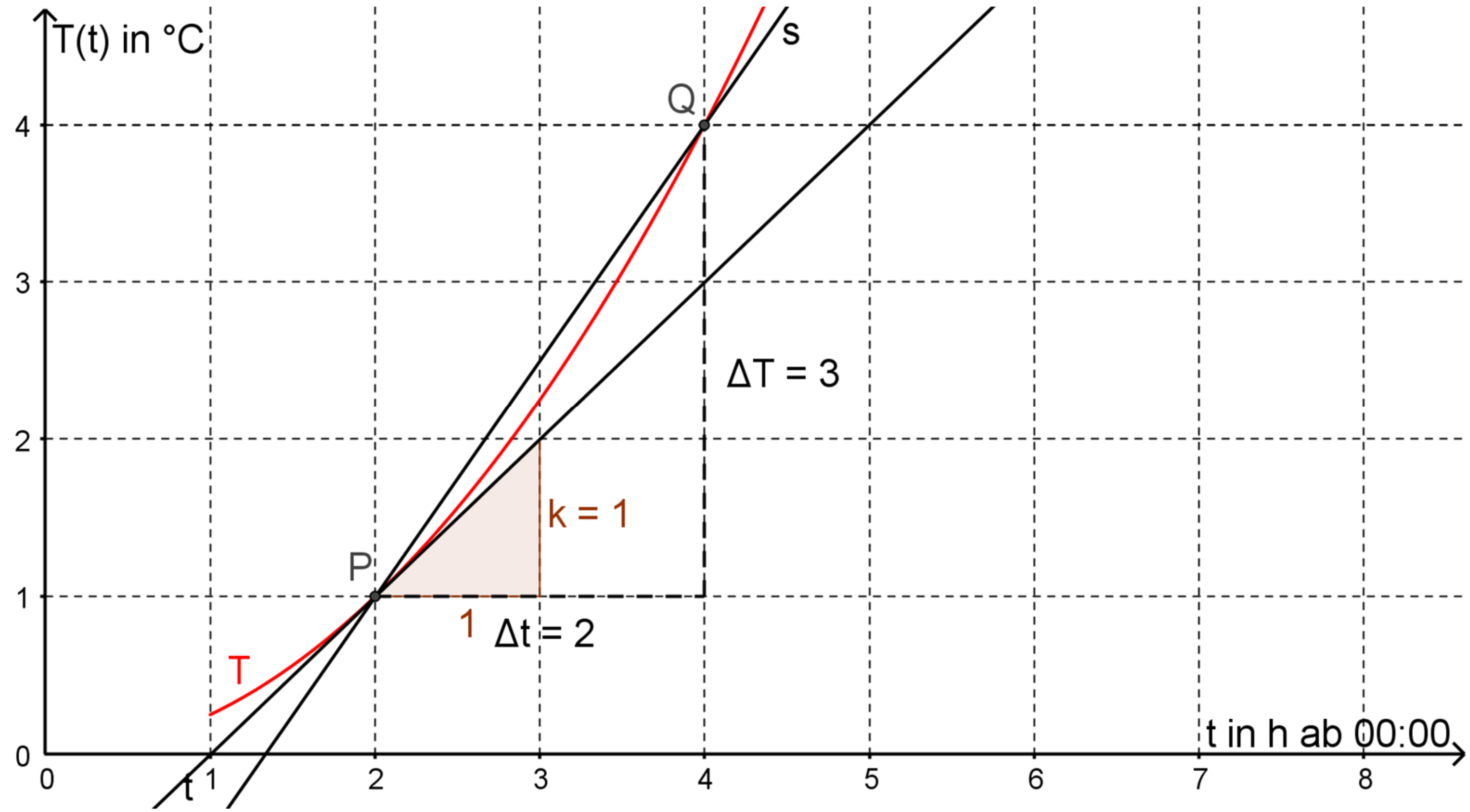
Einführung Differenzialrechnung

- heute mach ich es so:
  Die Temperatur steigt von 1°C um 2:00 auf 4°C um 4:00.
  Der Temperaturanstieg lässt sich annähernd beschreiben durch
  $T(t) = t^2/4$.
  t ... Zeit in Stunden ab 00:00;
  T(t) ... Temperatur in °C zum Zeitpunkt t
- Berechne die **mittlere Temperaturänderung** für das **Zeitintervall** [2; 4]:
  $$\frac{\Delta T}{\Delta t} = \frac{T(4)-T(2)}{4-2} = \frac{4°C-1°C}{4h-2h} = 1{,}5°C/h$$
  für [2; 3], für [2; 2,1], für [2; 2,01]
- Ermittle die **momentane Temperaturänderung** zum **Zeitpunkt** t = 2:
  $$\frac{dT}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{T(2+\Delta t)-T(2)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (1 + \frac{1}{4}\Delta t) = 1°C/h$$

Kompetenzorientierter Unterricht

Einführung Differenzialrechnung

- Grafische Darstellung:



Kompetenzorientierter Unterricht

Aufgabe zur Differenzial- und Integralrechnung

- früher:

  Die kubische Parabel mit der Gleichung $f(x) = ax^3 + bx$ hat in $H(2|{}^{8}/_{3})$ einen Hochpunkt.

  a) Ermittle die Funktionsgleichung.

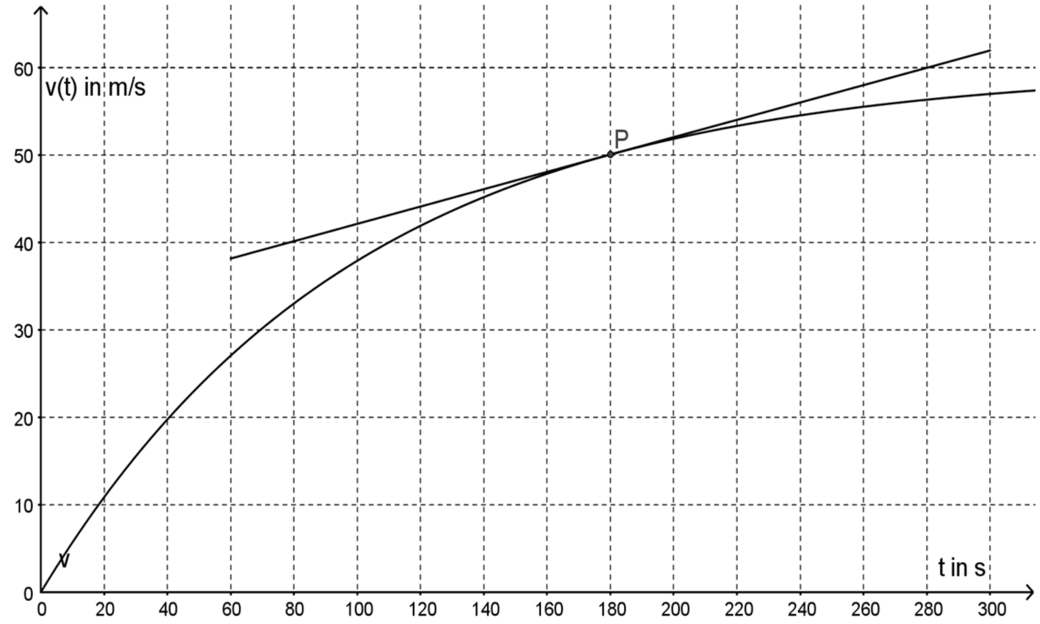
  b) Ermittle die Gleichung der Geraden g, die durch den Ursprung und den Hochpunkt geht.

  c) Wie groß ist der Inhalt der Fläche, die von dieser Geraden g und der Kurve umschlossen wird?

Kompetenzorientierter Unterricht

Aufgabe zur Differenzial- und Integralrechnung

- heute:
  Das v-t-Diagramm beschreibt den Beschleunigungsvorgang eines **Railjet**:



a) Lies ab, nach welcher Zeit der Railjet eine Geschwindigkeit von 100 km/h erreicht hat.
b) Ermittle die mittlere Beschleunigung des Railjet in den ersten 40 Sekunden.
c) Im Punkt P des Graphen ist die Tangente an die Geschwindigkeitskurve gezeichnet.
Lies die Steigung der Tangente ab. Interpretiere den Wert im Sachzusammenhang.
d) Ermittle näherungsweise den Weg, den der Railjet in den ersten 40 Sekunden zurücklegt.

Neue Aufgabenkultur:

Mathematik

- mehr als Rechnen

- mit Verständnis lernen

- eine sinnvolle Tätigkeit

Lust auf kompetenzorientierte Aufgaben? Link:

- http://www.bifie.at/
  http://aufgabenpool.bifie.at/bhs