Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

3. und 4. Dezember 2012

46) Was ist ein *Algebrenhomomorphismus*? Wie ist der *Kern* einer solchen Funktion definiert? Beschreiben Sie die Kerne (durch Erzeugendensysteme dieser Ideale) und die Bilder (durch eine $\mathbb{Q}$-Basis dieser Vektorräume) der folgenden Algebrenhomomorphismen:

$$\alpha : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{R}, \; f \longmapsto f(\sqrt{5}) \; ,$$
$$\beta : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{Q}[x], \; f \longmapsto f(x^2+1) \; ,$$
$$\gamma : \mathbb{Q}[x] \longrightarrow \mathbb{C}, \; f \longmapsto f(i-1) \; .$$

47) Welche der folgenden Funktionen sind Gruppenhomomorphismen? Berechnen Sie dann von diesen das Bild und den Kern.

$$f : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot), \; t \longmapsto cos(2t) + i \cdot sin(2t) \; ,$$
$$g : (\mathbb{R}, +) \longrightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot), \; t \longmapsto exp(t) \; ,$$
$$h : (\{A \in GL(n, \mathbb{R}) \,|\, det(A) > 0\}, \circ) \longrightarrow (\mathbb{R}, +),$$
$$A \longmapsto ln(det(A)) \; .$$

48) Erläutern Sie den *Homomorphiesatz.*
Es sei $n \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Homomorphiesatzes, dass die Ringe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[x]$ und $(\mathbb{Z}[x])/(n\mathbb{Z}[x])$ isomorph sind. Formulieren Sie den Unterschied zwischen diesen zwei Ringen in Worten.

49) K sei ein Körper und $\mathcal{F}(K, K)$ die K-Algebra aller Funktionen von K nach K.
Zeigen Sie, dass die Funktion $f : K[x] \longrightarrow \mathcal{F}(K, K)$, die jedem Polynom die entsprechende Polynomfunktion zuordnet, ein K-Algebrenhomomorphismus ist. Unter welchen Bedingungen an K ist f ein Isomorphismus? Beschreiben Sie im Fall, dass f nicht injektiv ist den Kern von f (durch ein Erzeugendensystem dieses Ideals).

50) Wie ist das *Produkt von Ringen* definiert? Es seien $R_1, R_2, \ldots, R_n$ kommutative Ringe und I ein Ideal in $R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n$.
Zeigen Sie, dass es Ideale I_j in R_j, $1 \leq j \leq n$, gibt so, dass $I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_n$ ist.
Wieviele Ideale gibt es im Ring $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_5$?
Zeigen Sie, dass die Ringe
$(R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_n)/I$ und $R_1/I_1 \times R_2/I_2 \times \ldots \times R_n/I_n$ isomorph sind.

51) Es seien K ein Körper und $0 \neq f \in K[x]$ so, dass die Menge $N(f)$ der Nullstellen von f in K nicht leer ist.
Zeigen Sie: Die Funktion

$$\alpha : K[x]/\langle f \rangle \longrightarrow \mathcal{F}(N(f), K), \quad \bar{g} \longmapsto [z \longmapsto g(z)] ,$$

ist wohldefiniert und ein Algebrenhomomorphismus. Dabei ist $\mathcal{F}(N(f), K)$ die Algebra aller Funktionen von $N(f)$ nach K.
Unter welchen Bedingungen an f ist α ein Isomorphismus?