

**Proseminar Algebra 1**  
**WS 2012/13**

**26. und 27. November 2012**

- 40) Was ist der *Quotientenkörper* eines Integritätsbereiches? Wie sind Addition und Multiplikation in einem Quotientenkörper definiert? Zeigen Sie, dass die Addition im Quotientenkörper „wohldefiniert“ ist:

Wenn  $R$  ein Integritätsbereich ist,  $a, b, c, d, a', b', c', d' \in R$  mit  $b \neq 0, b' \neq 0, d \neq 0, d' \neq 0$  und  $ab' = a'b, cd' = c'd$ , dann ist auch  $(ad + bc)b'd' = (a'd' + b'c')bd$ .

- 41) Was ist eine *rationale Funktion* mit Koeffizienten in einem Körper  $K$ ? Berechnen Sie Polynome  $u$  und  $v$  in  $\mathbb{Q}[x]$  so, dass  $gr(u) < 3$ ,  $gr(v) < 4$  und

$$\begin{aligned} & \frac{x^6 - 2x^4 + x^3 - 3x^2 + x - 4}{(x^4 - x^2 + x - 2)(x^3 - x^2 - 4x + 1)} = \\ & = \frac{u}{x^3 - x^2 - 4x + 1} + \frac{v}{x^4 - x^2 + x - 2} \end{aligned}$$

ist. (Verwenden Sie dazu Maple oder ein anderes CAS).

- 42) Was ist die *Partialbruchzerlegung* einer rationalen Funktion? Berechnen Sie die Partialbruchzerlegung in  $\mathbb{Q}(x)$  von

$$\frac{x^3 + x + 1}{(x - 2) \cdot (x^2 - 3x + 1)^2} \quad , \quad \frac{x + 2}{x^8 - x^7 + x^6 - x^2 + x - 1}$$

und

$$\frac{x + 1}{x^5 - 3x^4 - x^3 + 11x^2 - 12x + 4} \quad .$$

(In Maple kann ein rationales Polynom  $f$  mit dem Befehl `factor(f)` in irreduzible Faktoren zerlegt werden).

43) Berechnen Sie die Summe

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)} \quad .$$

44) Formulieren Sie zu den Sätzen 56, 57 und 58 der Vorlesung analoge Sätze für ganze Zahlen und beweisen Sie diese. Berechnen Sie dann ganze Zahlen  $a, b, c, d$  so, dass

$$\frac{a}{11} + \frac{b}{3} + \frac{c}{9} + \frac{d}{27} = \frac{148}{27 \cdot 11}$$

und  $0 \leq b, c, d < 3, 0 \leq a < 11$  ist.

45) Berechnen Sie eine Stammfunktion der rationalen Funktion

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)^4 \cdot (x^3 + 1)} \in \mathbb{R}(x) \quad .$$