Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

19. und 20. November 2012

34) Was sind *mehrfache Nullstellen* eines Polynoms? Es sei n eine positive ganze Zahl. Zeigen Sie: Das Polynom

$$1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n \in \mathbb{C}[x]$$

hat keine mehrfachen Nullstellen.
Berechnen Sie die Anzahl der komplexen Nullstellen des Polynoms

$$x^5 - x^4 - \frac{17}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{16}{81}x + \frac{4}{81}\ .$$

35) Was ist die *Ableitung* eines Polynoms? Überprüfen Sie, ob das Polynom

$$1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{12}x^5 \in \mathbb{Q}[x]$$

bzw.

$$x^{13} + x^9 + x^7 + x^3 + x^2 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$$

mehrfache Nullstellen in $\mathbb{Q}$ bzw. $\mathbb{Z}_2$ hat. Verwenden Sie dazu Maple (oder ein anderes CAS).

36) Was ist eine *lineare Differenzengleichung der Ordnung* n? Sei n eine positive ganze Zahl und a eine komplexe Zahl. Zeigen Sie: Der Rest von x^n nach Division durch $x - a$ ist a^n und die Auswertung des polynomialen Quotienten in 1 ergibt

$$\frac{a^n - 1}{a - 1}\ .$$

Verwenden Sie das und Satz 53, um die folgende Aufgabe aus einem Lehrbuch für die 11. Schulstufe zu lösen:
Reichel, H., et al.: Lehrbuch der Mathematik 7. öbv hpt Verlagsgesellschaft, Wien, 4. Auflage 1999.
Aufgabe 793: Die Differenzengleichung $x_{n+1} = a \cdot x_n + b$; x_0 *beschreibt einen dynamischen Prozess.*
a) Zeige unter Verwendung der Summenformel der endlichen

geometrischen Reihe: Für $a \neq 1$ lautet die (explizite) Lösung dieser Differenzengleichung:

$$x_n = a^n \cdot x_0 + b \cdot \frac{1-a^n}{1-a} \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

37) Berechnen Sie die Lösung g der durch $x^3 - 9x^2 + 26x - 24$ gegebenen homogenen linearen Differenzengleichung mit $g(0) = 0, g(1) = 1, g(2) = 2$.

38) Beweisen Sie die *Formel von Binet*: Das n-te Glied $f(n)$ der Fibonacci-Folge ist

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

39) Mit A bezeichnen wir die $\mathbb{R}$-Algebra der beliebig oft differenzierbaren Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und mit D die lineare Funktion von A nach A, die jeder Funktion in A ihre Ableitung zuordnet. Zeigen Sie, dass A mit

$$\mathbb{R}[x] \times A \longrightarrow A\,,\ (\sum_{i=0}^{n} c_i x^i, f) \longmapsto \sum_{i=0}^{n} c_i D^i(f)$$

ein $\mathbb{R}[x]$-Modul ist.
Für reelle Zahlen $c_0, \ldots, c_n$ heißt eine Funktion $f \in A$ mit $\sum_{i=0}^{n} c_i D^i(f) = 0$ eine „Lösung der durch $\sum_{i=0}^{n} c_i D^i$ gegebenen homogenen Differentialgleichung“ .
Zeigen Sie, dass die Funktion

$$A \longrightarrow A\,,\ (f \longmapsto \sum_{i=0}^{n} c_i D^i(f)$$

$\mathbb{R}[x]$-linear ist und folgern Sie: Wenn f und g Lösungen sind, dann auch alle reellen Linearkombinationen von f und g. Wenn f eine Lösung ist, dann auch die Ableitung $D(f)$.