Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

12. und 13. November 2012

31) Was ist ein *ZPE-Ring*? Was ist eine *Basis* eines Moduls?
Zeigen Sie:
a) $\mathbb{Z}[x]/ < x^2 + 5 >$ ist ein Integritätsbereich und ein freier $\mathbb{Z}$-Modul mit Basis $\{\bar{1}, \bar{x}\}$.
(Dabei ist $< x^2 + 5 >$ das von $x^2 + 5$ in $\mathbb{Z}[x]$ erzeugte Ideal).
b) $\mathbb{Z}[x]/ < x^2 + 5 >$ ist nicht faktoriell.
(Hinweis: $\bar{3} \cdot \bar{3} = (\bar{2} + \bar{x}).(\bar{2} - \bar{x})$).

32) Was ist ein *irreduzibles Polynom*? Welche Eigenschaften haben irreduzible Polynome und Primzahlen gemeinsam? Zeigen Sie: Ein Polynom vom Grad 3 mit Koeffizienten in einem Körper K hat genau dann keine Nullstellen in K, wenn es irreduzibel ist. Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass diese Behauptung mit Grad 4 nicht mehr stimmt. Zerlegen Sie die Polynome

$$x^2 - 4,\ x^3 + 1,\ x^4 - 3x^2,\ x^3 - x^2 - 17x - 15$$

in $\mathbb{Q}[x]$ und die Polynome

$$x^5 + x^4 + x + 1,\ x^3 + x^2 + 1$$

in $\mathbb{Z}_2[x]$ in irreduzible Faktoren.

33) Es seien $f \in \mathbb{Z}[x]$, $f(0) \neq 0$, $f(1) \neq 0$, $f(-1) \neq 0$,
$a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$, $ggT(a, b) = 1$ und $f(\frac{a}{b}) = 0$.
Zeigen Sie: a teilt $f(0)$, b teilt $lk(f)$, $a - b$ teilt $f(1)$ und $a + b$ teilt $f(-1)$.
Berechnen Sie alle rationalen Nullstellen von

$$f = 8x^4 - 3x^3 - 7x^2 - 31x + 24 \quad .$$