Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

5. und 6. November 2012

25) Was ist eine *Interpolationsaufgabe*? Erläutern Sie die Methoden von Lagrange und von Newton zur Lösung solcher Aufgaben. Berechnen Sie mit der Methode von Lagrange ein Polynom f vom Grad 2 mit rationalen Koeffizienten so, dass $f(-1) = 3$, $f(2) = -1$ und $f(3) = 4$ ist.

26) Berechnen Sie ein Polynom g vom Grad 4 so, dass für $n = 0, 1, 2, 3, 4$
$$g(n) = \sum_{i=0}^{n} i^3$$
ist.
Zeigen Sie dann durch Induktion über n, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $g(n) = \sum_{i=0}^{n} i^3$.

27) Was ist der *größte gemeinsame Teiler* zweier oder mehrerer Polynome? Erläutern Sie den Euklidischen Algorithmus zu seiner Berechnung. Berechnen Sie den größten gemeinsamen Teiler g der Polynome
$$f_1 := x^2 - 1,\ f_2 := x^3 - 1,\ f_3 := x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$
in $\mathbb{Q}[x]$ und Polynome h_1, h_2, h_3 in $\mathbb{Q}[x]$ so, dass
$$g = f_1h_1 + f_2h_2 + f_3h_3$$
ist. Verwenden Sie dazu den Maple-Befehl *gcdex* (oder den entsprechenden Befehl in einem anderen Computeralgebra-System).

28) Erklären Sie den *erweiterten Euklidischen Algorithmus* für ganze Zahlen und für Polynome.
Es seien $a := x^4 + x^2 + 1$ und $b := x^3 + x + 1$ Polynome in $\mathbb{Z}_2[x]$. Berechnen Sie (falls möglich) $u, v \in \mathbb{Z}_2[x]$ so, dass

$$x + 1 = ua + vb$$

ist.
Berechnen Sie (falls möglich) Polynome $u, v \in \mathbb{Q}[x]$ so, dass

$$(x^4 + x^2 - x + 2)u + (-x^2 + 3x + 1)v = x$$

ist.

29) Begründen Sie, warum $\mathbb{Q}[x]$ ein Hauptidealring ist und warum $\mathbb{Z}$ ein Hauptidealring ist.
Es seien

$$f := x^4 - 6x^3 - x^2 + 10x + 4$$

und

$$g := x^5 - 7x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 1$$

Polynome in $\mathbb{Q}[x]$. Überprüfen Sie, ob

$$x^7 + x^6 + x^3 + x^2 + x + 1$$

in dem von f und g erzeugten Ideal enthalten ist.

30) Mit der folgenden Maple-Prozedur werden für zwei positive ganze Zahlen a und b der ganzzahlige Quotient und der Rest von a nach Division durch b berechnet. Schreiben Sie diese Prozedur so um, dass nach Eingabe von zwei Polynomen a und b der polynomiale Quotient und der Rest von a nach Division durch b berechnet werden.

```
rest:=proc(a,b)
local c,d,m;
m:=0;
c:=a; d:=b;
while c≥d do c:=c-d;
m:=m+1;
od;
print(m); print(c);
end proc;
```