Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

29. und 30. Oktober 2012

19) Was ist eine *Polynomfunktion*? Was heißt *eine Polynomfunktion in einem Element des Definitionsbereichs auswerten*? Werten Sie die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Q},\ z \longmapsto -3 + 2z + z^2 + 4z^4 + 2z^6 - z^7$$

in $\frac{2}{3}$ aus.
Werten Sie die Polynomfunktion

$$g : \mathbb{Z}_7 \longrightarrow \mathbb{Z}_7,\ z \longmapsto \bar{1} + \bar{2}z + \bar{2}z^6 - \bar{4}z^{345} + z^{2012}$$

in $\bar{4}$ aus. Wieviele Multiplikationen sind dazu jeweils mindestens nötig?
(Hinweis zum Auswerten von g: Berechnen Sie zuerst $\overline{4}^3$ in $\mathbb{Z}_7$.)

20) Es sei $R := \mathbb{Z}_4$ und A die Algebra aller Polynomfunktionen von R nach R. Wieviele Elemente hat A? Ist das von der identischen Funktion x und von der konstanten Funktion $\bar{2}$ erzeugte Ideal ein Hauptideal? Wieviele Elemente enthält dieses Ideal? Ist es ein freier R-Modul ?

21) Was ist ein *Polynom*? Was ist der *Grad* eines Polynoms? Berechnen Sie den Rest von $f \in R[x]$ nach Division durch $g \in R[x]$, dabei sei
   a) $R = \mathbb{Z},\ f = x^4 + 3x^2 - 2x + 2,\ g = x^2 - 3x + 2,$
   b) $R = \mathbb{Z}_{11},\ f = x^4 - \bar{4}x^2 + \bar{3}x + \bar{1},\ g = \bar{5}x^2 - x + \bar{1},$
   c) $R = \mathbb{Q},\ f = x^4 + 2x^2 - 3x + 4,\ g = 3x^2 + 2x - 1.$

22) Was ist eine *Basis* eines Moduls? Es sei R ein kommutativer Ring und $a \in R$. Begründen Sie, warum $((x-a)^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine R-Basis des Polynomringes $R[x]$ ist. Wie kann man die Koordinaten eines Polynoms bezüglich dieser Basis berechnen?
Es sei $0 \neq f$ ein Polynom mit Koeffizienten in R, n eine positive ganze Zahl und $a \in R$. Berechnen Sie $c_0, \ldots, c_n \in R$ so, dass

$$f^n = \sum_{i=0}^{n} c_i (f-a)^i$$

ist. (Hinweis: $f = (f-a) + a$).

23) Was ist eine *Nullstelle* eines Polynoms? Zeigen Sie, dass $\frac{1}{3}$ eine Nullstelle von

$$x^3 - \frac{1}{3}x^2 + 2x - \frac{2}{3} \quad \text{und von} \quad x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{19}{3}x + 2$$

ist und berechnen Sie alle Nullstellen dieser Polynome in $\mathbb{Q}$.

24) Berechnen Sie alle Nullstellen von $x^2 - 1 \in \mathbb{C}[x]$ in $\mathbb{C}^{2\times 2}$.
Hinweis: Für A in $\mathbb{C}^{2\times 2}$ ist $A = I_2$ genau dann, wenn $T^{-1}AT = I_2$ für alle T in $GL_2(\mathbb{C})$ ist. Warum genügt es daher, Matrizen in oberer Dreiecksgestalt zu betrachten?