Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

22. und 23. Oktober 2012

13) Was ist eine *Primzahl*? Was besagt der Satz über die Zerlegung von positiven natürlichen Zahlen in *Primfaktoren*? Es seien u, v von Null verschiedene ganze Zahlen, deren größter gemeinsamer Teiler 1 ist.
Zeigen Sie: Die Bruchzahl $\frac{u}{v}$ kann genau dann exakt durch endlich viele Dezimalziffern dargestellt werden, wenn unter den Primfaktoren von v nur die Zahlen 2 und 5 auftreten. Formulieren und beweisen Sie eine analoge Aussage für Ziffern zur Basis $b \geq 2$.

14) Was ist ein *Ideal* in einem kommutativen Ring? Es sei $\mathcal{F}$ der kommutative Ring aller Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ und M eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Menge

$$I := \{f \in \mathcal{F} \,|\, \text{für alle } m \in M \text{ ist } f(m) = 0\}$$

ein Ideal von $\mathcal{F}$ ist. Ist I ein Hauptideal? Zeigen Sie, dass die Restklassen modulo I von zwei Funktionen in $\mathcal{F}$ genau dann gleich sind, wenn deren Einschränkungen auf M gleich sind. Gibt es „wesentliche Unterschiede" zwischen den Ringen $\mathcal{F}/I$ und dem Ring aller Funktionen von M nach $\mathbb{R}$? Ändert sich etwas an der Aufgabe, wenn man statt $\mathcal{F}$ den Ring der stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ betrachtet?

15) Wie ist der Ring $\mathbb{Z}_n$ (für $n \geq 2$) definiert? Welche Elemente von $\mathbb{Z}_n$ sind invertierbar? Wie berechnet man das zu einem invertierbaren Element von $\mathbb{Z}_n$ inverse Element?
Es seien $k = 751$ bzw. 752 und $n = 2344$.
Überprüfen Sie, ob $\overline{k}$ in $\mathbb{Z}_n$ invertierbar ist. Wenn ja, berechnen Sie das zu $\overline{k}$ inverse Element in $\mathbb{Z}_n$.
Berechnen Sie für alle Elemente $x \in \mathbb{Z}_7$ die dazu inversen Elemente x^{-1} und schreiben Sie x^{-1} als Potenz von x.

16) Es seien $n \in \mathbb{N}$, R ein kommutativer Ring mit n Elementen (zum Beispiel $\mathbb{Z}_n$) und I ein Ideal von R. Zeige: Jede Restklasse modulo I in R hat gleich viele Elemente wie I. Folgern Sie daraus: Die Anzahl a der Elemente von I ist ein Teiler von n und die Anzahl der Elemente von R/I ist $\frac{n}{a}$. Wieviele Ideale hat $\mathbb{Z}_{24}$?

17) Wie kann man Reste modulo n von Potenzen ganzer Zahlen mit wenig Rechenaufwand berechnen?
Berechnen Sie den Rest von
$$(113 \cdot 63^2 - 21^3 \cdot 17^3 \cdot 5^6) \cdot 155$$
nach Division durch 11.
Berechnen Sie den Rest von 5^{10000} nach Division durch 7, den Rest von 11^{1000} nach Division durch 8 und den Rest von 233^{100000} nach Divison durch 9.
Versuchen Sie, mit Maple den Rest von $7^{1000000000}$ nach Division durch 47 auf zwei Arten zu berechnen: einmal mit

irem(7^1000000000, 47); oder 7^1000000000 mod 47;

und einmal mit

7&^1000000000 mod 47;

Erläutern Sie den Unterschied.

18) Mit der „Neunerprobe“ hat man früher die Richtigkeit von Additionen (bis auf Vielfache von 9) überprüft, indem man die Reste nach Division durch 9 der Summe der Ziffern aller Summanden und der Ziffernsumme des Ergebnisses berechnet hat. Waren diese zwei Reste gleich, war die Rechnung bis auf Vielfache von 9 richtig.
Begründen Sie dieses Verfahren mithilfe des Ringes $\mathbb{Z}_9$.
Wie kann es auf die Multiplikation übertragen werden?
Wodurch muß die „Neuner-Probe“ ersetzt werden, wenn man mit Zahlen rechnet, die durch Ziffern zur Basis $b \geq 2$ dargestellt werden?