

Proseminar Algebra 1
WS 2012/13

15. und 16. Oktober 2012

7) Was ist ein *Integritätsbereich*? Was ist ein *Körper*? Zeigen Sie: Jeder Integritätsbereich mit nur endlich vielen Elementen ist ein Körper.
Hinweis: Betrachten Sie für jedes Element s des Integritätsbereiches die Folge $(s^i)_{i \in \mathbb{N}}$.

8) Es seien $(b_i)_{i \geq 1}$ eine Folge von ganzen Zahlen, die größer als 1 sind, und $B_0 := 1$. Für $k \geq 1$ sei $B_k := b_1 b_2 \dots b_k$.
Zeigen Sie: Zu jeder positiven ganzen Zahl a gibt es eindeutig bestimmte Zahlen $n \in \mathbb{N}$ und $z_0, z_1, \dots, z_n \in \mathbb{N}$ so, daß $0 \leq z_i < b_{i+1}$ und $a = \sum_{i=0}^n z_i B_i$.
Geben Sie ein Verfahren zur Berechnung dieser Zahlen an.

9) Was ist der *größte gemeinsame Teiler* von zwei positiven ganzen Zahlen? Erläutern Sie den *euklidischen Algorithmus* zu seiner Berechnung. Was bedeutet es, eine Bruchzahl zu *kürzen*?
Die Zahlen c, d sind durch Ziffern zur Basis b gegeben. Berechnen Sie Zahlen e, f so, dass $\text{ggT}(e, f) = 1$ und $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$ ist. Dabei seien

$$b = 10, \quad c = 4841, \quad d = 6077$$

bzw.

$$b = 2, \quad c = 1110010100, \quad d = 11010101010.$$

- 10) Was ist eine ganzzahlige lineare Gleichung mit 2 Unbekannten, wie entscheidet man, ob sie eine Lösung hat und - wenn ja - wie berechnet man diese? Berechnen Sie ganze Zahlen u und v so, dass

$$5040 \cdot u + 11011 \cdot v = \text{ggT}(5040, 11011)$$

ist.

- 11) Wie löst man eine ganzzahlige lineare Gleichung mit 3 oder mehr Unbekannten? Beschreiben Sie die Menge aller Tripel (x, y, z) von ganzen Zahlen mit der Eigenschaft

$$182 \cdot x + 221 \cdot y + 156 \cdot z = 273$$

bzw.

$$182 \cdot x + 221 \cdot y + 156 \cdot z = 272 .$$

Enthält diese Menge ein Tripel von natürlichen Zahlen?

- 12) Was sind *Maschinenzahlen*, wie können sie dargestellt werden? Stellen Sie die Bruchzahl $\frac{73}{345}$ (Zähler und Nenner durch Ziffern zur Basis zehn dargestellt) in Exponentialform zur Basis 2 mit 8 Ziffern nach dem Komma dar.